Segnali per le comunicazioni –Appello del 7/9/2024

Gli esercizi devono essere svolti nel tempo massimo di 2h

Esercizio 1

Sia dato il sistema LTI con risposta all'impulso $h(t) = \frac{\sin(\pi 6(t-1))}{\pi(t-1)} \cos\left(\pi 3t + \frac{1}{4}\pi\right)$

A) Si calcoli l'espressione analitica della risposta in frequenza $H(f)$

B) Si traccino i grafici di modulo e fase della trasformata di Fourier di $y(t) = h(t) * \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$
(suggerimento: semplificate per quanto possibile l'espressione analitica di $Y(f)$ raccogliendone i termini comuni…)

Esercizio 2

Si campioni il segnale tempo continuo $x(t) = \sin(2\pi t) + \sin(4\pi t) + \sin(8\pi t)$ con frequenza di campionamento $f_s = 5$ ottenendo il segnale x_n.

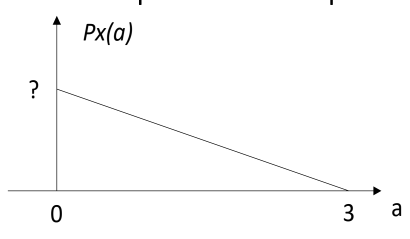
A) Si traccino i grafici della trasformata di Fourier del segnale x_n sia in frequenza sia in frequenza normalizzata.

B) Si trovi l'espressione del segnale $x_R(t)$ tempo continuo ricostruito dai campioni di x_n.

C) Si trovi l'espressione della DFT dei primi 30 campioni di x_n ($0 \leq n \leq 29$).

Esercizio 3

Sia dato il processo casuale continuo, stazionario $x(t)$ bianco nella banda $-25 < f < 25$ Hz. La densità di probabilità del processo $p_x(a)$ è lineare decrescente come in figura.



A) Si scriva l'espressione della funzione di autocorrelazione del processo $x(t)$.

B) Il processo $x(t)$ viene campionato con intervallo di campionamento 1/10 di secondo ottenendo il processo discreto x_n. Si trovi la varianza di $y_n = x_n - 2x_{n-1}$.

C) Si genera il processo z_n azzerando i campioni del processo $x_n \leq 1$ e lasciando inalterati quelli con $x_n > 1$. Si disegni la densità di probabilità delle ampiezze dei campioni z_n.

Soluzione Esercizio 1 del 7/9/2024

A) La trasformata di Fourier di $h(t)=\frac{\sin(\pi 6(t-1))}{\pi(t-1)}\cos\left(\pi 3t+\frac{1}{4}\pi\right)$ ha la seguente espressione:

$$H(f)=\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}rect\left(\frac{f-\frac{3}{2}}{6}\right)e^{-j2\pi\left(f-\frac{3}{2}\right)}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}rect\left(\frac{f+\frac{3}{2}}{6}\right)e^{-j2\pi\left(f+\frac{3}{2}\right)}$$

B) La trasformata di Fourier di $y(t)=h(t)*\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$ è

$$Y(f)=X(f)H(f)=H(f)\cdot rect(f)$$

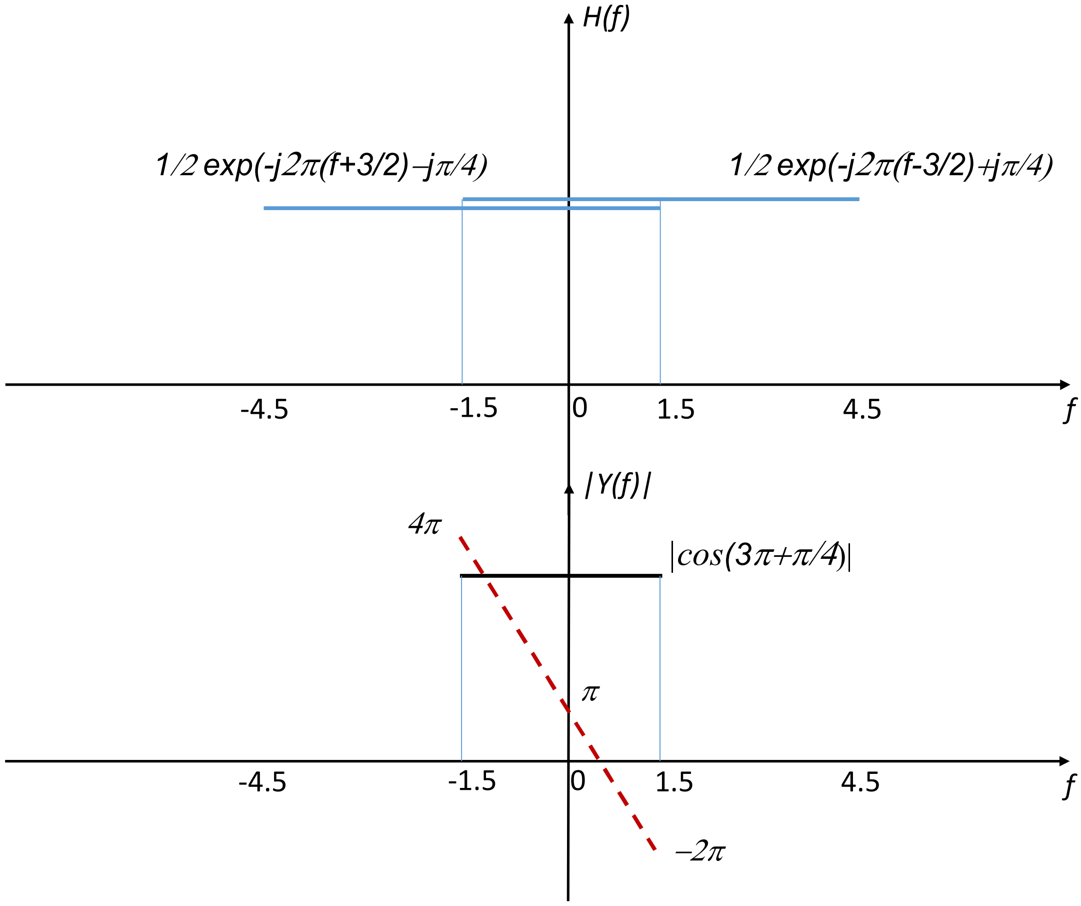
Dunque uguale a $H(f)$ nella banda $-\frac{1}{2}<f<\frac{1}{2}$.

$$Y(f)=\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{-j2\pi\left(f-\frac{3}{2}\right)}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{-j2\pi\left(f+\frac{3}{2}\right)}$$

Raccogliendo il termine $e^{-j\{2\pi f\tau\}}$, si ottiene la seguente espressione:

$$Y(f)=\frac{1}{2}e^{-j\{2\pi f\}}\left[e^{j\left\{3\pi+\frac{\pi}{4}\right\}}+e^{-j\left\{3\pi+\frac{\pi}{4}\right\}}\right]=e^{-j\{2\pi f\}}\cos\left(3\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\{2\pi f\}}$$

I grafici di modulo e fase di $Y(f)$ insieme a quello di $H(f)$ sono riportati nella seguente figura.

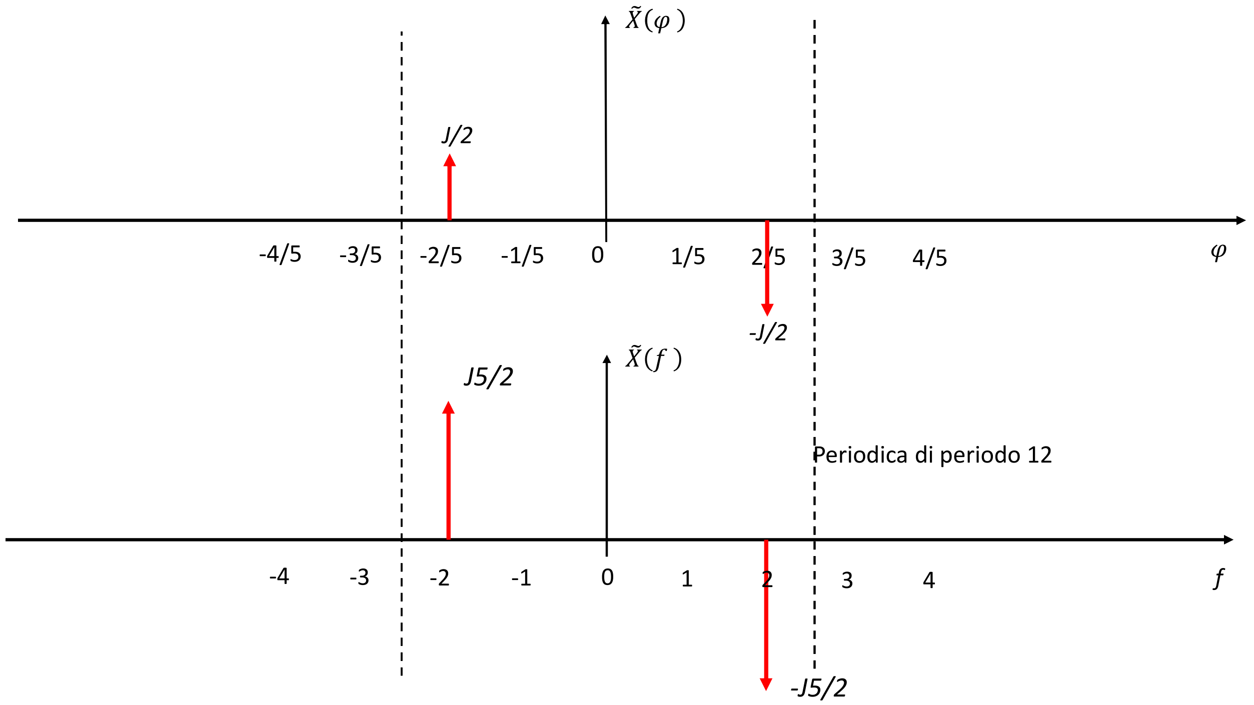


<u>**Soluzione**   Esercizio 2 del del 7/9/2024</u>

A) La trasformata di $x(t) = \sin(2\pi t) + \sin(4\pi t) + \sin(8\pi t)$ è:

$$X(f) = \frac{j}{2}[\delta(f+1) + \delta(f+2) + \delta(f+4) - \delta(f-1) - \delta(f-2) - \delta(f-4)]$$

Con la frequenza di campionamento $f_s = 5$ si introduce alias. Le trasformate $\tilde{X}(f)$ e $\tilde{X}(\varphi)$ (periodiche di periodo 5 e 1 rispettivamente) sono riportate nelle seguenti figure.



B) L'espressione della trasformata di Fourier del segnale ricostruito è:

$$X_R(f) = \frac{j}{2}[\delta(f+2) - \delta(f-2)]$$

Il segnale ricostruito è quindi:

$$x_R(t) = \sin(4\pi t)$$

C) La DFT dei primi 30 campioni di $x_n = \sin\left(2\pi\frac{2}{5}n\right)$ è:

$$X_k = -15j\delta_{k-1} \ + 15j\delta_{k-18}$$

Soluzione Esercizio 3 del del 7/9/2024

A) Dai dati del problema la densità di probabilità del processo dato è triangolare da (0,2/3) a (3,0):

$$p_x(a) = \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{9}a\right) \cdot rect\left(\frac{a}{3} - \frac{1}{2}\right)$$

Da cui

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} a\, p_x(a) da = \frac{2}{9}\int_0^3 (3-a)a\, da = 1$$

$$E[x(t)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} a^2\, p_x(a) da = \frac{2}{9}\int_0^3 (3-a)a^2\, da = \frac{3}{2}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

La funzione di autocorrelazione del processo è:

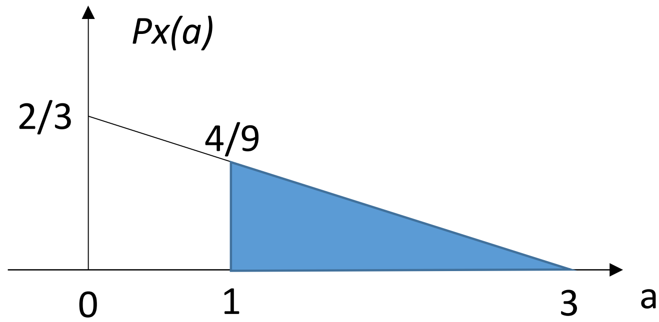
$$R_x(\tau) = \sigma_x^2 \frac{\sin(\pi 50\tau)}{\pi 50\tau} + m_x^2 = \frac{1}{2}\frac{\sin(\pi 50\tau)}{\pi 50\tau} + 1$$

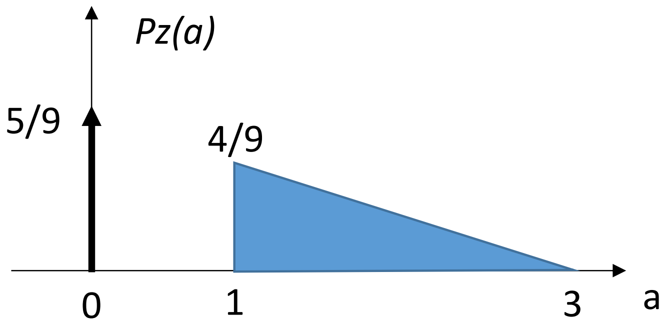
B) Il processo $x(t)$ viene campionato con intervallo di campionamento 1/10 di secondo ottenendo il processo discreto x_n.

$$R_x[m] = \frac{1}{2}\frac{\sin\left(\pi 50 \frac{m}{10}\right)}{\pi 50 \frac{m}{10}} + 1 = \frac{1}{2}\delta_m + 1$$

Il processo è bianco e quindi la varianza della somma di campioni è uguale a somma delle varianze: $\sigma_y^2 = \sigma_x^2 + 4\sigma_x^2 = \frac{5}{2}$.

C) Si genera il processo z_n azzerando i campioni del processo $x_n \leq 1$ e lasciando inalterati quelli con $x_n > 1$. La densità di probabilità delle ampiezze dei campioni z_n ha un impulso in 0 di area (vedi la seguente figura) $1 - 2\frac{4}{9}\frac{1}{2} = \frac{5}{9}$ e la ddp di z_n uguale a quella di x_n per $1 < a < 3$.


Px(a)
2/3
4/9
0
1
3
a


Pz(a)
5/9
4/9
0
1
3
a