Segnali per le comunicazioni –Appello del 5/9/2023

Gli esercizi devono essere svolti nel tempo massimo di 2h

Esercizio 1

Sia dato il segnale $x(t) = \left[\frac{\sin[3\pi(t-\tau)]}{\pi(t-\tau)}\right]^2 \cos\left(2\pi \frac{t}{\tau}\right)$

A) Si trovi l'espressione analitica della sua trasformata di Fourier $X(f)$ con τ generico.

B) Si traccino i grafici del modulo e della fase di $X(f)$ nel caso in cui $\tau = 2$

Esercizio 2

Si campioni il segnale tempo continuo $x(t) = \cos(16\pi t)\cos(8\pi t + \vartheta)$ con intervallo di campionamento $T = \frac{1}{3}$ ottenendo il segnale discreto x_n.

A) Si disegni la trasformata di Fourier del segnale discreto x_n sia in frequenza che in frequenza normalizzata.

B) Si trovi l'espressione del segnale ricostruito $x_R(t)$

C) Il calcolo della DFT dei primi 30 campioni del segnale discreto x_n ottenuto campionando $x(t)$ o $x_R(t)$ porta allo stesso risultato o ad un risultato differente?

Esercizio 3

Sia dato il processo casuale x_n stazionario con varianza valor medio $m_x = -3$, potenza uguale a 12 e coefficiente di correlazione $\rho_x[m] = \frac{\sin \pi\frac{m}{4}}{\pi\frac{m}{4}}$.

A) Si disegni il grafico della densità spettrale di potenza del processo dato x_n.

B) Il processo viene filtrato con un sistema LTI con risposta in frequenza $\widetilde{H}(f) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4\pi f$ ottenendo il processo filtrato y_n. Si trovi la potenza del processo filtrato y_n.

C) Valor medio e varianza di $z_n = x_n + x_{n-6}$ sono uguali, minori o maggiori di quelli di $v_n = x_n + x_{n-4}$?

<u>**Soluzione**</u> <u>Esercizio 1 del 5/9/2023</u>

A) Si trovi l'espressione della trasformata di Fourier $X(f)$.

La trasformata di $\left[\frac{\sin[3\pi t]}{\pi t}\right]^2$ è $3 \cdot tri\left(\frac{f}{3}\right)$ dove $tri(f) = rect(f) * rect(f)$

La trasformata di $\left[\frac{\sin[3\pi(t-\tau)]}{\pi(t-\tau)}\right]^2$ è $3 \cdot tri\left(\frac{f}{3}\right) e^{-j2\pi\tau f}$

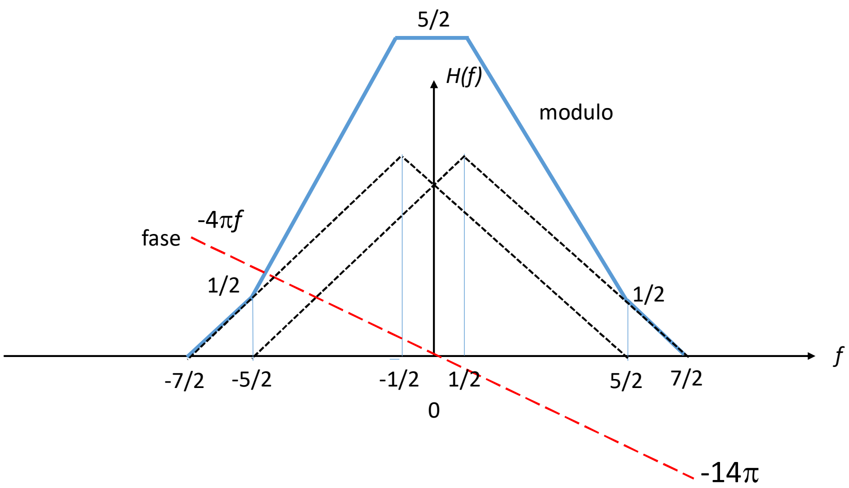
La trasformata di $x(t) = \left[\frac{\sin[3\pi(t-\tau)]}{\pi(t-\tau)}\right]^2 \cos\left(2\pi \frac{t}{\tau}\right)$ è

$$X(f) = \frac{3}{2} tri\left(\frac{f+\frac{1}{\tau}}{3}\right) e^{-j2\pi\tau\left(f+\frac{1}{\tau}\right)} + \frac{3}{2} tri\left(\frac{f-\frac{1}{\tau}}{3}\right) e^{-j2\pi\tau\left(f-\frac{1}{\tau}\right)} = \frac{3}{2}\left[tri\left(\frac{f+\frac{1}{\tau}}{3}\right) + tri\left(\frac{f-\frac{1}{\tau}}{3}\right)\right] e^{-j2\pi\tau f}$$

B) Per tracciare il grafico del modulo e quello della fase di $X(f)$ con $\tau = 2$ si noti che:

$$X(f) = \begin{cases} \frac{3}{2} tri\left(\frac{f-\frac{1}{2}}{3}\right) e^{-j4\pi f} & \frac{5}{2} < f < \frac{7}{2} \\ \frac{3}{2} tri\left(\frac{f+\frac{1}{2}}{3}\right) e^{-j4\pi f} & -\frac{7}{2} < f < -\frac{5}{2} \\ \frac{3}{2}\left[tri\left(\frac{f+\frac{1}{2}}{3}\right) + tri\left(\frac{f-\frac{1}{2}}{3}\right)\right] e^{-j4\pi f} & -\frac{5}{2} < f < \frac{5}{2} \end{cases}$$

Modulo e fase sono riportati nella figura seguente.



Soluzione Esercizio 2 del 5/9/2023

A) La trasformata di $x(t)$ è:

$$X(f) = \frac{1}{2}[\delta(f-8) + \delta(f+8)] * \frac{1}{2}\left[\delta(f-4)e^{j\vartheta} + \delta(f+4)e^{-j\vartheta}\right]$$

Dunque

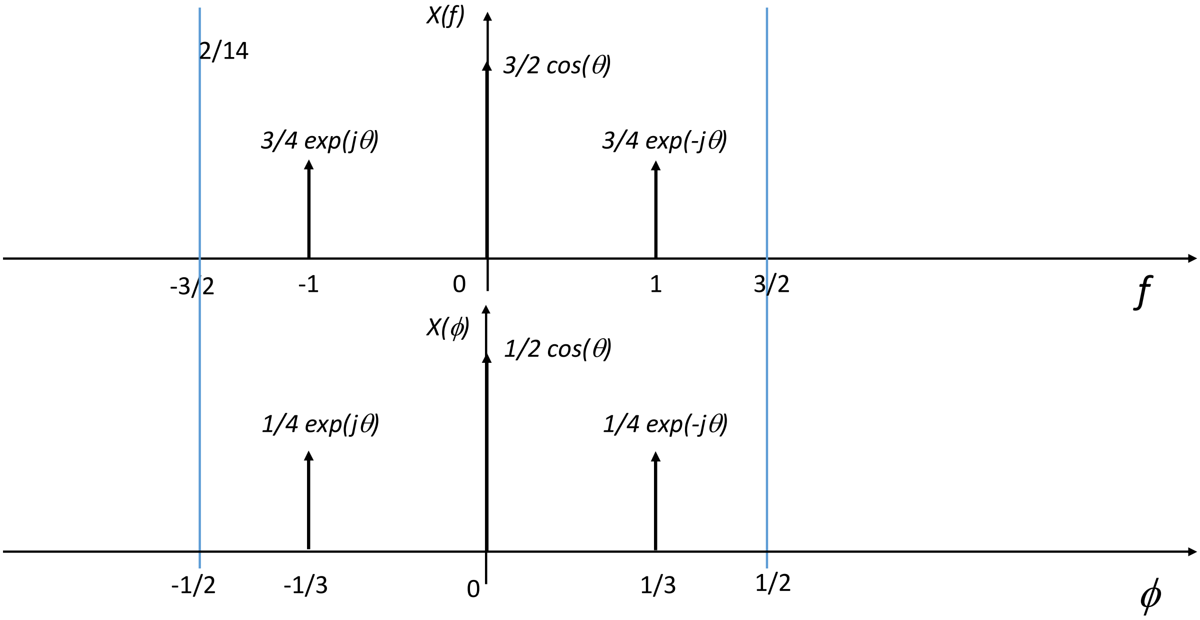
$$X(f) = \frac{1}{4}\left[\delta(f-12)e^{j\vartheta} + \delta(f+12)e^{-j\vartheta} + \delta(f-4)e^{-j\vartheta} + \delta(f+4)e^{j\vartheta}\right]$$

A causa del campionamento $X(f)$ viene ripetuta a passo $f_s = 3$ e moltiplicata per 3. L'intervallo di aosservazione è tra -1.5 e +1.5. In questo intervallo si trovano a causa della periodicizzazione in frequenza due impulsi a frequenze +1 e -1 e un impulso a frequenza nulla. Analiticamente:

$$\begin{aligned}\tilde{X}(f) &= \frac{3}{4}\left[\delta(f)e^{j\vartheta} + \delta(f)e^{-j} \ \ + \delta(f-1)e^{-j\vartheta} + \delta(f+1)e^{j\vartheta}\right] \\ &= \frac{3}{4}\left[2\delta(f)\cos\vartheta + \delta(f-1)e^{-j\vartheta} + \delta(f+1)e^{j\vartheta}\right]\end{aligned}$$

Passando alla frequenza normalizzata $f = \varphi \cdot f_s = 3\varphi$

$$\begin{aligned}\tilde{X}(\varphi) &= \frac{3}{2}\delta(3\varphi)\cos\vartheta + \frac{3}{4}\delta(3\varphi - 1)e^{-j\vartheta} + \frac{3}{4}\delta(3\varphi+1)e^{j\vartheta} \\ &= \frac{1}{2}\delta(\varphi)\cos\vartheta + \frac{3}{4}\delta\left(3\left(\varphi - \frac{1}{3}\right)\right)e^{-j\vartheta} + \frac{3}{4}\delta\left(3\left(\varphi + \frac{1}{3}\right)\right)e^{j\vartheta} = \\ &= \frac{1}{2}\delta(\varphi)\cos\vartheta + \frac{1}{4}\delta\left(\varphi - \frac{1}{3}\right)e^{-j\vartheta} + \frac{1}{4}\delta\left(\varphi + \frac{1}{3}\right)e^{j\vartheta}\end{aligned}$$



B) La trasformata del segnale ricostruito è uguale a $X_R(f) = \frac{1}{f_s}\tilde{X}(f)$

$$X_R(f) = \frac{1}{2}\delta(f)\cos\vartheta + \frac{1}{4}\delta(f-1)e^{-j\vartheta} + \frac{1}{4}\delta(f+1)e^{j\vartheta}$$

L'espressione del segnale ricostruito è quindi:

$$x_R(t) = \frac{1}{2}\cos\vartheta + \frac{1}{2}\cos(2\pi t - \vartheta)$$

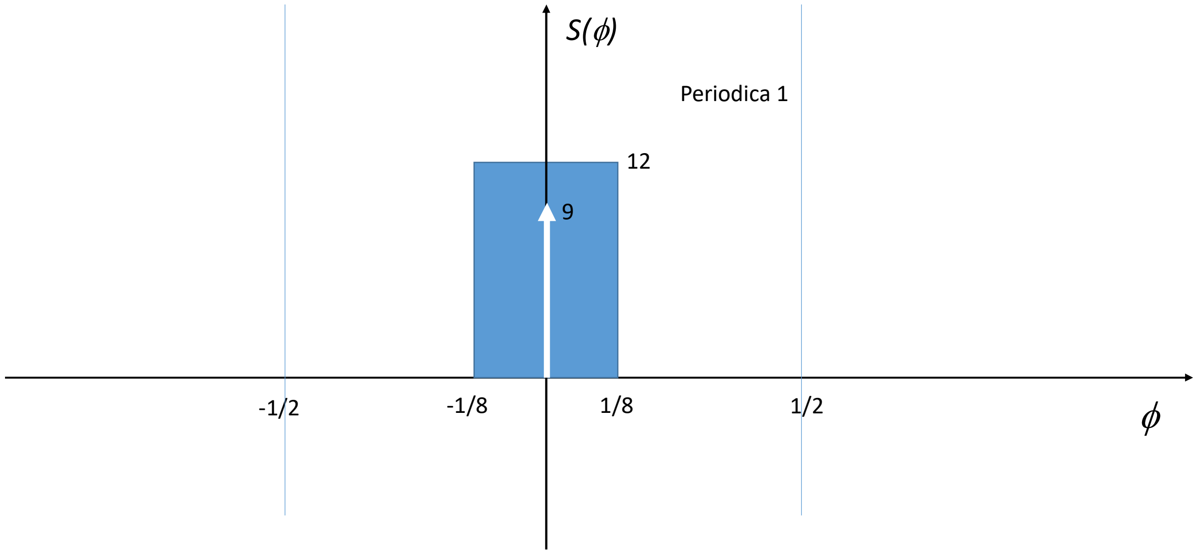
C) La DFT dei primi 30 campioni del segnale x_n è identica visto che x_n ha per definizione la stessa espressione sia che si campioni $x(t)$ o $x_R(t)$.

<u>**Soluzione**</u> <u>Esercizio 3 del 5/9/2023</u>

A) La varianza del processo dato è: $\sigma_x^2 = 12 - m_x^2 = 3$ e l'autocorrelazione ha la seguente espressione:

$$R_x[m] = \sigma_x^2 \rho_x[m] + m_x^2 = 12 \frac{\sin \pi \frac{m}{4}}{\pi m} + 9$$

Il grafico della densità spettrale di potenza del processo dato x_n è riportato nella figura seguente:



B) La potenza del processo filtrato y_n è:

$$P_y = 9 + 12 \int_{-\frac{1}{8}}^{\frac{1}{8}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4\pi f\right)^2 df = 9 + 12 \int_{-\frac{1}{8}}^{\frac{1}{8}} \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos^2(4\pi f) - \frac{1}{4}\cos 4\pi f \, df =$$

$$9 + 12\left[\frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{8\pi}\right]$$

C) I valori medi sono ovviamente uguali e valgono $2m_x = -6$. La potenza di $v_n = x_n + x_{n-4}$ è maggiore di quella di z_n dato che i campioni x_n sono incorrelati a passo 4 mentre hanno autocovarianza negativa a passo 6.

$$E[z_n^2] = 2E[x_n^2] + 2R_x[1] = 2E[x_n^2] + 2C_x[6] + 2m_x^2$$

$$E[v_n^2] = 2E[x_n^2] + 2R_x[4] = 2E[x_n^2] + 2C_x[4] + 2m_x^2$$