Segnali per le comunicazioni –Appello del 26/8/2022

Gli esercizi devono essere svolti nel tempo massimo di 2h

Esercizio 1

Sia dato il segnale $x(t) = \left[\frac{\sin\left[2\pi\left(t-\frac{3}{2}\right)\right]}{\pi\left(t-\frac{3}{2}\right)}\right]^2 \sin\left(2\pi\frac{2}{3}t\right)$

A) Si trovi l'espressione analitica della sua trasformata di Fourier $X(f)$

B) Si traccino i grafici del modulo e della fase di $X(f)$.

Esercizio 2

Si campioni il segnale tempo continuo $x(t) = \frac{\sin(4\pi t)}{\pi t}\cos(32\pi t)$ con intervallo di campionamento $T = \frac{1}{7}$ ottenendo il segnale discreto x_n.

A) Si disegni la trasformata di Fourier del segnale discreto x_n sia in frequenza che in frequenza normalizzata.

B) Si trovi l'espressione del segnale ricostruito $x_R(t)$

C) Si trovi l'espressione della DFT del segnale discreto ottenuto campionando il segnale originale $x(t)$ con intervallo di campionamento $T = \frac{1}{4}$

Esercizio 3

Sia dato il processo casuale x_n stazionario a valor medio unitario e varianza unitaria e coefficiente di correlazione $\rho_x[m] = \frac{\sin \pi\frac{m}{2}}{\pi\frac{m}{2}}$. Il processo viene filtrato con un sistema LTI con risposta in frequenza $\widetilde{H}(f) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4\pi f$ ottenendo il processo filtrato y_n.

A) Si disegni il grafico della densità spettrale di potenza del processo dato x_n.

B) Si trovi la potenza del processo filtrato y_n.

C) Si calcoli l'autocorrelazione del processo casuale $z_n = x_{2n} - 1$

Soluzione Esercizio 1 del 26/8/2022

A) Si trovi l'espressione della trasformata di Fourier $X(f)$.

La trasformata di $\left[\frac{\sin[2\pi t]}{\pi t}\right]^2$ è $2 \cdot tri\left(\frac{f}{2}\right)$ dove $tri(f) = rect(f) * rect(f)$

La trasformata di $\left[\frac{\sin\left[2\pi\left(t-\frac{3}{2}\right)\right]}{\pi\left(t-\frac{3}{2}\right)}\right]^2$ è $2 \cdot tri\left(\frac{f}{2}\right) e^{-j2\pi\frac{3}{2}f}$

La trasformata di $x(t) = \left[\frac{\sin\left[2\pi\left(t-\frac{3}{2}\right)\right]}{\pi\left(t-\frac{3}{2}\right)}\right]^2 \sin\left(2\pi\frac{2}{3}t\right)$ è

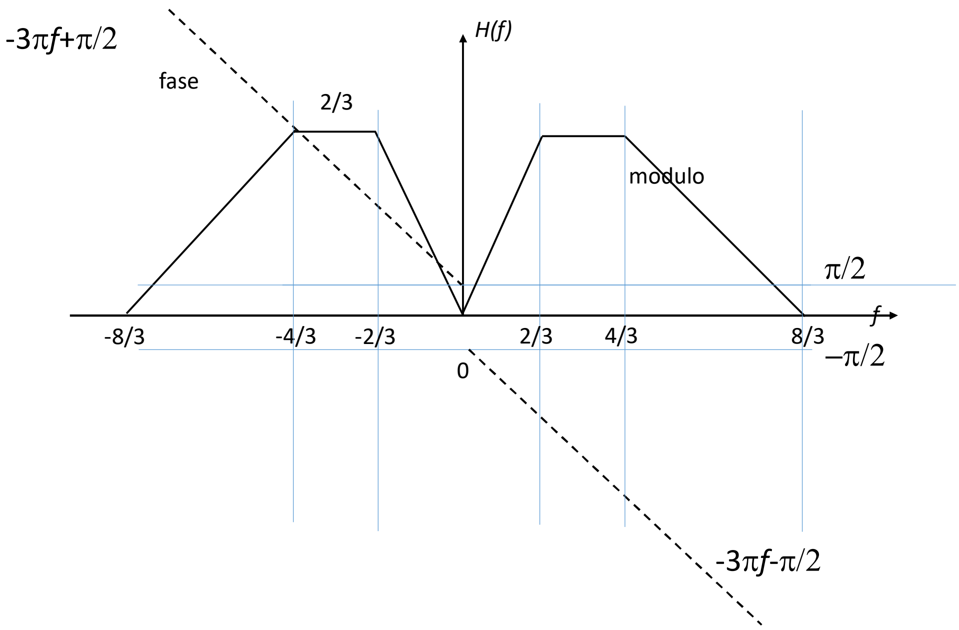
$$X(f) = j \cdot \left[tri\left(\frac{f+\frac{2}{3}}{2}\right) e^{-j2\pi\frac{3}{2}\left(f+\frac{2}{3}\right)} - tri\left(\frac{f-\frac{2}{3}}{2}\right) e^{-j2\pi\frac{3}{2}\left(f-\frac{2}{3}\right)}\right] =$$

$$= j \cdot \left[tri\left(\frac{f+\frac{2}{3}}{2}\right) - tri\left(\frac{f-\frac{2}{3}}{2}\right)\right] e^{-j2\pi\frac{3}{2}f}$$

B) Per tracciare il grafico del modulo e quello della fase di $H(f)$ si noti che:

$$H(f) = \begin{cases} tri\left(\frac{f-\frac{2}{3}}{2}\right) e^{-j\left(3\pi f+\frac{\pi}{2}\right)} & \frac{4}{3} < f < \frac{8}{3} \\ tri\left(\frac{f+\frac{2}{3}}{2}\right) e^{-j\left(3\pi f-\frac{\pi}{2}\right)} & -\frac{8}{3} < f < -\frac{4}{3} \\ \left[tri\left(\frac{f+\frac{2}{3}}{2}\right) - tri\left(\frac{f-\frac{2}{3}}{2}\right)\right] e^{-j\left(3\pi f-\frac{\pi}{2}\right)} & -\frac{4}{3} < f < \frac{4}{3} \end{cases}$$

Modulo e fase sono riportati nella figura seguente.



-3πf+π/2
fase
H(f)
2/3
modulo
π/2
f
-8/3
-4/3
-2/3
2/3
4/3
8/3
−π/2
0
-3πf-π/2

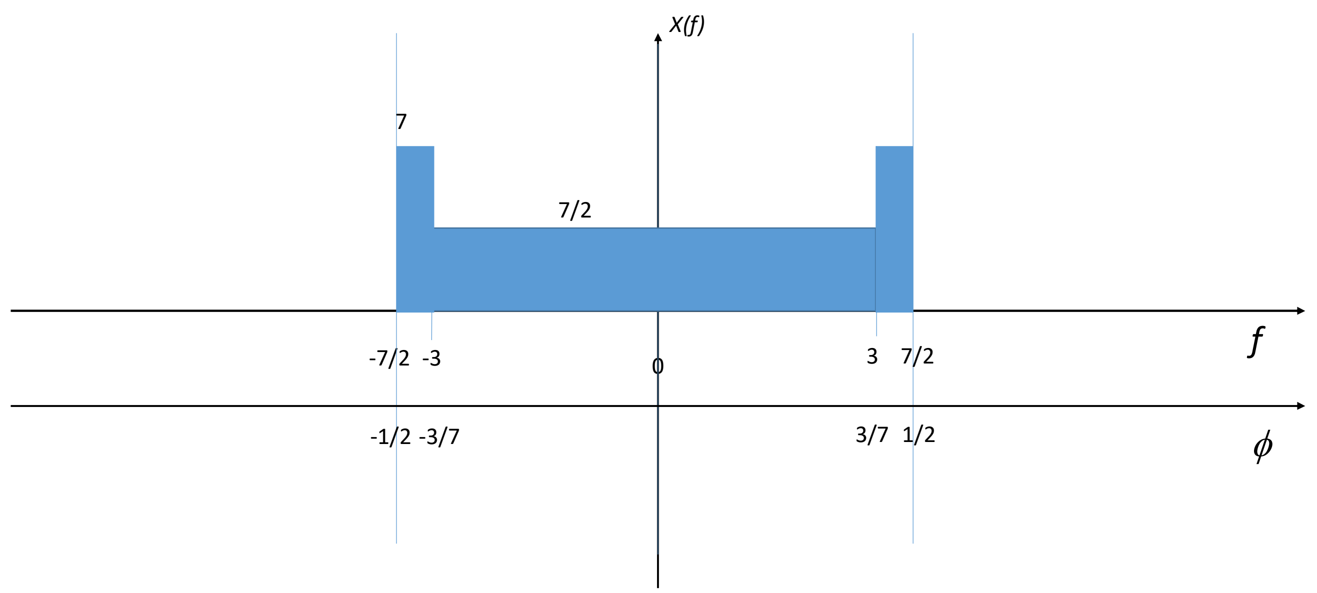
Soluzione Esercizio 2 del 26/8/2022

A) La trasformata di $x(t)$ è:

$$X(f) = \frac{1}{2} rect\left(\frac{f-16}{4}\right) + \frac{1}{2} rect\left(\frac{f+16}{4}\right)$$

A causa del campionamento viene ripetuta a passo $f_s = 7$ e moltiplicata per 7.

Il risultato è mostrato graficamente nella figura seguente in frequenza sia in frequenza normalizzata.



B) La trasformata del segnale ricostruito è uguale a :

$$X_R(f) = \frac{1}{7} \cdot \widetilde{X(f)}$$

L'espressione del segnale ricostruito è quindi:

$$x_R(t) = \frac{1}{2}\frac{\sin(6\pi t)}{\pi t} + 2\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\pi t\right)}{\pi t} \cos\left(\pi \frac{13}{2} t\right)$$

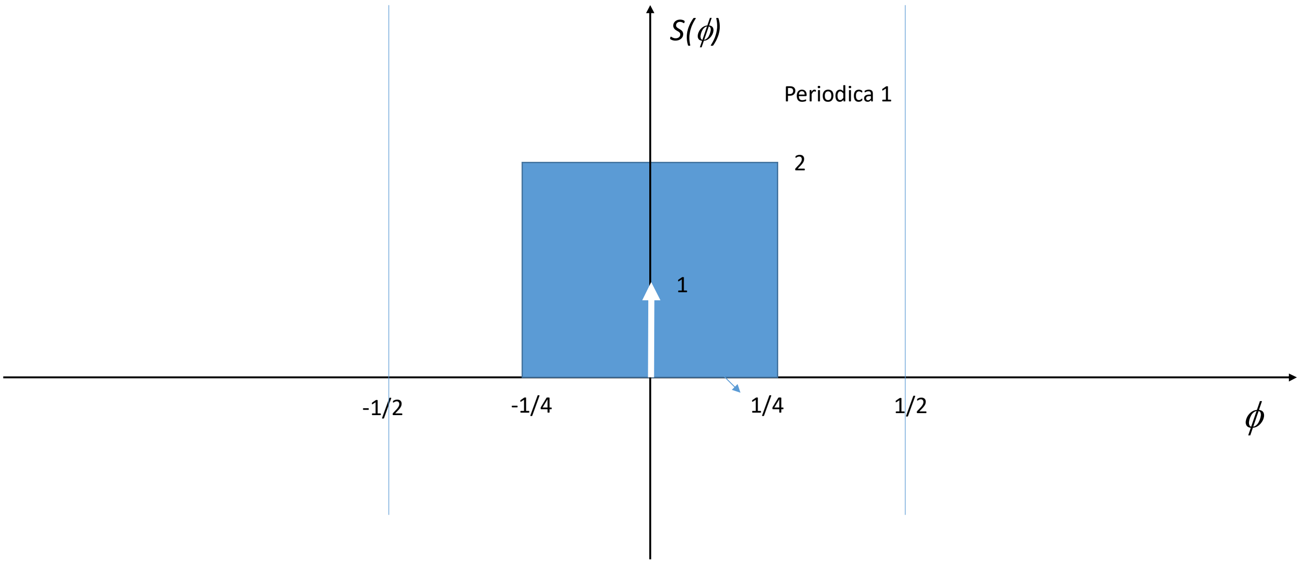
C) Campionando $x(t) = \frac{\sin(4\pi t)}{\pi t} \cos(32\pi t)$ a passo $T = \frac{1}{4}$ si ottiene:

$$x_n = \frac{\sin\left(4\pi \frac{n}{4}\right)}{\pi \frac{n}{4}} \cos\left(32\pi \frac{n}{4}\right) = 4\delta_n$$

la cui DFT è $X_k = 4$

Soluzione Esercizio 3 del 26/8/2022

A) il grafico della densità spettrale di potenza del processo dato x_n è riportato nella figura seguente:



B) La potenza del processo filtrato y_n è:

$$P_y = 1 + 2 \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4\pi f\right)^2 df = 1 + 2 \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos^2(4\pi f) + \frac{1}{4}\cos 4\pi f \, df =$$

$$1 + 2\left[\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + 0\right] = \frac{11}{8}$$

C) I campioni del processo casuale $z_n = x_{2n} - 1$ sono tra lo incorrelati e il loro valor medio è nullo.

Dunque l'autocorrelazione vale: $R_z[m] = \sigma_z^2 \delta_m = \delta_m$