Segnali per le comunicazioni –Appello del 25/8/2021

Esercizio 1 da svolgere in 35 minuti

Sia dato il segnale $y(t) = x(t)[\cos(16\pi t) + \sin(16\pi t)]$ dove $x(t) = \left[\frac{\sin(2\pi t)}{\pi t}\right]^2$.

A) Si trovi l'espressione della trasformata di Fourier $Y(f)$ e se ne tracci il grafico.

B) Si campioni $y(t)$ con frequenza di campionamento $f_s = 4$ ottenendo il segnale discreto y_n. Si calcoli l'espressione del segnale ricostruito $y_R(t)$ a partire dai campioni y_n.

<u>**Soluzione**</u> <u>Esercizio 1 del 25/8/2021</u>

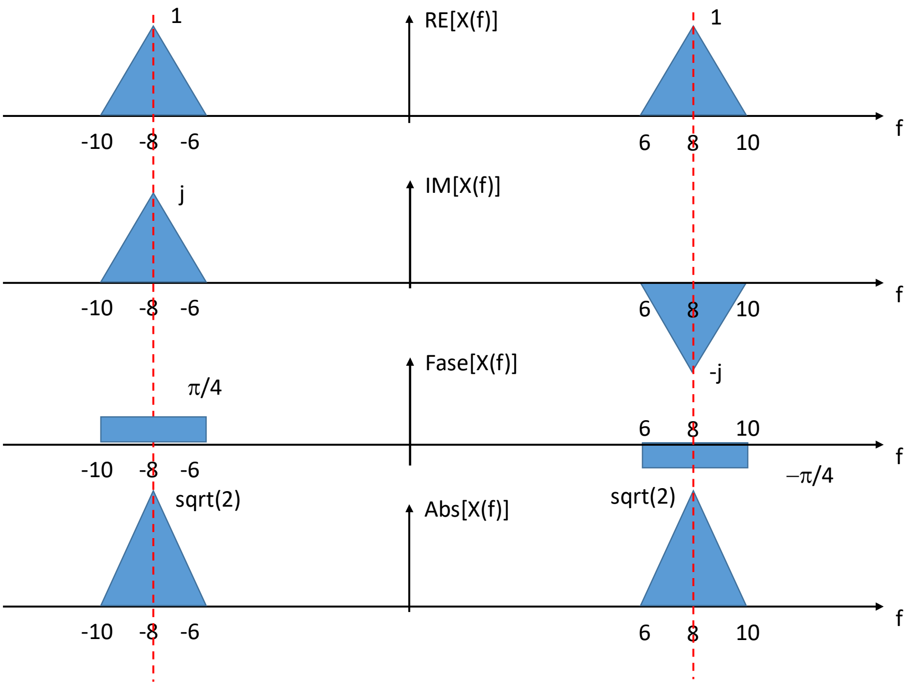
Sia dato il segnale $y(t) = x(t)[\cos(16\pi t) + \sin(16\pi t)]$ dove $x(t) = \left[\frac{\sin(2\pi t)}{\pi t}\right]^2$.

A) Si trovi l'espressione della trasformata di Fourier $Y(f)$ e se ne tracci il grafico.

$$X(f) = rect\left(\frac{f}{2}\right) * rect\left(\frac{f}{2}\right)$$

$X(f)$ è un triangolo tra -2 e 2 alto 2.

$Y(f) = \frac{1}{2}X(f-8) - \frac{j}{2}X(f-8) + \frac{1}{2}X(f+8) + \frac{j}{2}X(f+8)$ Il grafico della parte reale e parte immaginaria e del modulo e della fase sono mostrati nella seguente figura.



B) Si campioni $y(t)$ con frequenza di campionamento $f_s = 4$ ottenendo il segnale discreto y_n. Si calcoli l'espressione del segnale ricostruito $y_R(t)$ a partire dai campioni y_n.

Il campionamento introduce alias. La trasformata $\tilde{Y}(f)$ si calcola nella banda $-2 \leq f \leq 2$ dove la parte reale si somma e la parte immaginaria si cancella. $Y_R(f)$ è un triangolo tra -2 e 2 alto 2 e, di conseguenza, il segnale ricostruito è $y_R(t) = x(t) = \left[\frac{\sin(2\pi\ )}{\pi t}\right]^2$

Segnali per le comunicazioni –Appello del 25/8/2021

Esercizio 2 da svolgere in 35 minuti

Sia dato il processo casuale discreto x_n la cui densità spettrale di potenza è:
$S_x(\varphi) = 8 + 4\cos(2\pi\varphi) + 2\cos(4\pi\varphi) + \ \delta(\varphi)$ periodica di periodo 1.

- **A)** Si calcoli la potenza del processo dato.
- **B)** Si calcoli la potenza del processo $y_n = x_n - x_{n-1}$
- **C)** Si calcoli la potenza del processo $z_n = x_n + 2x_{n-3} + 3x_{n-9}$

Soluzione Esercizio 2 del 25/8/2021

Sia dato il processo casuale discreto x_n la cui densità spettrale di potenza è:
$S_x(\varphi) = 8 + 4\cos(2\pi\varphi) + 2\cos(4\pi\varphi) + \ \delta(\varphi)$ periodica di periodo 1.

A) Si calcoli la potenza del processo dato.

Il modo più semplice è integrare la densità spettrale di potenza su un periodo:

$$P_x = \int_{-0.5}^{0.5} S_x(\varphi)d\varphi = \int_{-0.5}^{0.5} 8 + 4\cos(2\pi\varphi) + 2\cos(4\pi\varphi) + \ \delta(\varphi)\, d\varphi = 9$$

In alternativa si calcola l'autocorrelazione e si valuta in suo valore in zero:

$$R_x[m] = 8\delta_m + 2\delta_{m\pm1} + \delta_{m\pm2} + 1$$

$$P_x = R_x[0] = 9$$

B) Si calcoli la potenza del processo $y_n = x_n - x_{n-1}$

Il modo più semplice è calcolare la densità spettrale di potenza di y_n e integrarla su un solo periodo:

$$S_y(\varphi) = S_x(\varphi)|H(\varphi)|^2 = \{8 + 4\cos(2\pi\varphi) + 2\cos(4\pi\varphi) + \ \delta(\varphi)\}\{2 - 2\cos(2\pi\varphi)\}$$
$$= 16 + 4\cos(4\pi\varphi) - 8\cos(2\pi\varphi) - 8\cos^2(2\pi\varphi) - 4\cos(2\pi\varphi)\cos(4\pi\varphi)$$

$$P_y = \int_{-0.5}^{0.5} S_y(\varphi)d\varphi = \int_{-0.5}^{0.5} 16 - 8\cos^2(2\pi\varphi)\, d\varphi = 12$$

In alternativa si calcola l'autocorrelazione e si valuta in suo valore in zero:

$$R_y[m] = (8\delta_m + 2\delta_{m\pm1} + \delta_{m\pm2} + 1) * (2\delta_m - \delta_{m-1} - \delta_{m+1})$$

$$P_y = R_y[0] = 12$$

C) Si calcoli la potenza del processo $z_n = x_n + 2x_{n-3} + 3x_{n-9}$

Il calcolo può essere eseguito come per il punto B. Tuttavia i conti sarebbero inutilmente lunghi. Infatti è sufficiente notare che i campioni $x_n,\ x_{n-3},\ x_{n-9}$ sono tra loro incorrelati e quindi la varianza della somma è uguale alla somma delle varianze:

$$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + 4\sigma_x^2 + 9\sigma_x^2 = 14\sigma_x^2 = 112$$

$\sigma_x^2 = P_x - m_x^2$ e il valor medio di x_n ha modulo unitario (area dell'impulso della densità spettrale di potenza). Dunque $\sigma_x^2 = 8$

Il valor medio di z_n è $m_z = (1+2+3)m_x = \pm 6$ e la potenza di z_n vale $P_z = \sigma_z^2 + m_z^2 = 148$