Segnali per le comunicazioni – Appello del 1/9/2025

Gli esercizi devono essere svolti nel tempo massimo di 2h

Esercizio 1

Sia consideri il segnale $x(t) = rect\left(t - \frac{1}{2}\right) e^{-j2\pi t}$

A) Si calcoli l'espressione analitica della risposta in frequenza $X(f)$

B) Si traccino i grafici di modulo e fase di $X(f)$ nella banda $-2 < f < 2$ Hz.

C) Si calcoli l'energia del segnale: $y(t) = x(t)\cos(2\pi t)$.

Esercizio 2

Si campioni il segnale tempo continuo $x(t) = \frac{\sin(4\pi t)}{\pi t} \cdot \sin(8\pi t)$ con frequenza di campionamento $f_s = 10$ ottenendo il segnale discreto x_n.

A) Si trovi l'espressione della trasformata di Fourier in frequenza normalizzata $X(\varphi)$ del segnale discreto x_n.

B) Si trovi l'espressione segnale $x_R(t)$ tempo continuo ricostruito dai campioni di x_n.

Esercizio 3

Sia dato il processo casuale stazionario discreto x_n con densità spettrale di potenza costante unitaria nella banda $-\frac{1}{4} < f < \frac{1}{4}$ e periodica di periodo 1.

A – Si scriva l'espressione dell'autocorrelazione del processo $x(t)$.

B – Si trovi il valore della varianza della somma dei primi 4 campioni di posizione dispari.

C – Sapendo che la densità di probabilità delle ampiezze è uniforme, si calcoli varianza e potenza del processo casuale $y_n = |x_n|$.

Soluzione Esercizio 1 del 1/9/2025

A) Sia consideri il segnale $x(t) = rect\left(t - \frac{1}{2}\right) e^{-j2\pi t}$

La trasformata di Fourier di $rect\left(t - \frac{1}{2}\right)$ è $X(f) = e^{-j\pi f} \frac{\sin \pi f}{\pi f}$

La trasformata di Fourier di $x(t) = rect\left(t - \frac{1}{2}\right) e^{-j2\pi t}$ è

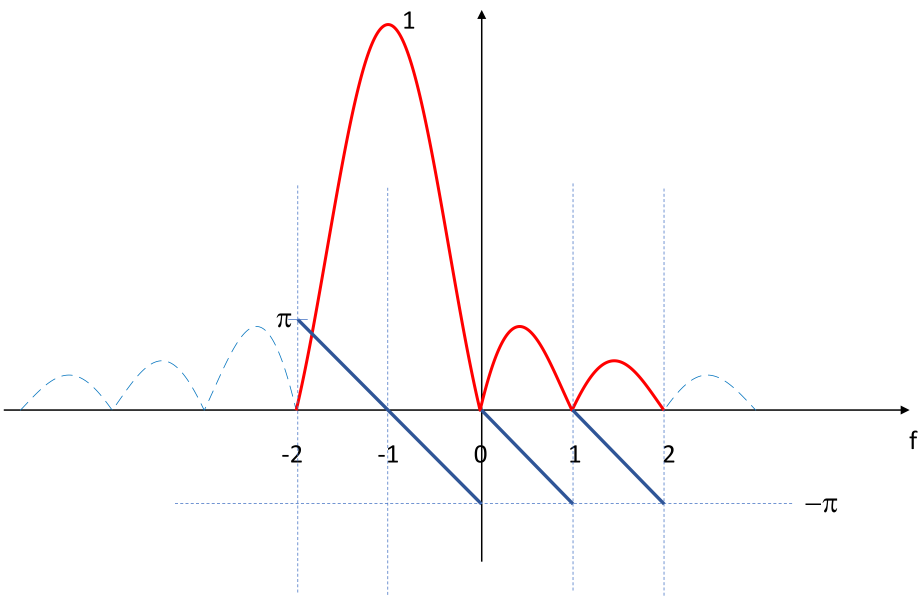
$$X(f) = e^{-j\pi(f+1)} \frac{\sin \pi(f+1)}{\pi(f+1)} = -e^{-j\pi f} \frac{\sin \pi(f+1)}{\pi(f+1)} \quad \text{essendo } e^{-j\pi} = -1$$

B) Banalmente il modulo $|X(f)| = \left|\frac{\sin \pi(f+1)}{\pi(f+1)}\right|$, mentre la fase vale

$-\pi f \pm \pi$ dove $\frac{\sin \pi(f+1)}{\pi(f+1)} > 0$ quindi nelle bande $-2 < f < 0$ e $1 < f < 2$

$-\pi f$ dove $\frac{\sin \pi(f+1)}{\pi(f+1)} < 0$ quindi nella banda $0 < f < 1$

Dunque il grafico di modulo e fase è il seguente:



C) L'energia di $y(t) = x(t)\cos(2\pi t)$ si calcola come

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|rect\left(t - \frac{1}{2}\right) e^{-j2\pi t} \cos(2\pi t)\right|^2 dt = \int_0^1 \cos^2(2\pi t)\, dt = \frac{1}{2}$$

Soluzione Esercizio 2 del 1/9/2025

A) La trasformata di $x(t) = \frac{\sin(4\pi t)}{\pi t} \cdot \sin(8\pi t)$ è

$$X(f) = \frac{j}{2} rect\left(\frac{f+4}{4}\right) - \frac{j}{2} rect\left(\frac{f-4}{4}\right)$$

Replicando $X(f)$ a passo 10 e moltiplicando per 10 si ottiene la trasformata del segnale discreto:

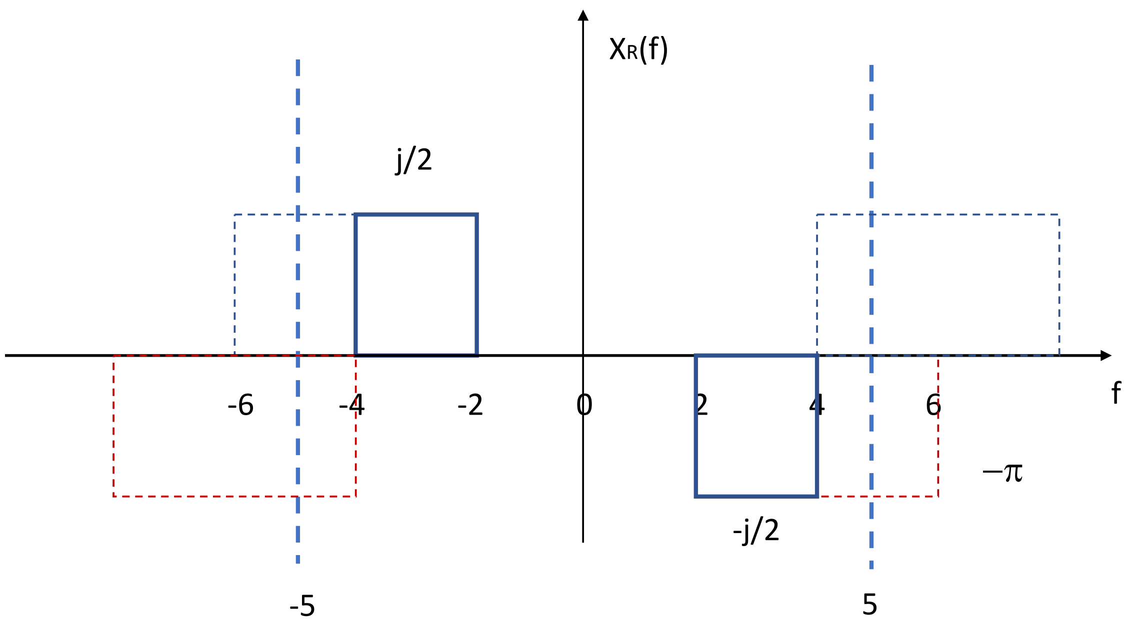
$\tilde{X}(f) = 10j \cdot rect\left(\frac{f+3}{2}\right) - 10j \cdot rect\left(\frac{f-3}{2}\right)$ periodo 10

Il passaggio alla frequenza normalizzata $\varphi = fT = \frac{f}{10}$ si ottiene sostituendo $f = 10\varphi$

$\tilde{X}(\varphi) = 10j \cdot rect\left(\frac{10\varphi+3}{2}\right) - 10j \cdot rect\left(\frac{10\varphi-3}{2}\right)$ periodo 1

B) La trasformata del segnale ricostruito si ottiene da $\tilde{X}(f)$ dividendo per 10 limitando le frequenze tra $-5 < f < 5$

$$X_R(f) = \frac{j}{2} rect\left(\frac{f+3}{2}\right) - \frac{j}{2} rect\left(\frac{f-3}{2}\right)$$



Per cui : $x_R(t) = \frac{\sin(2\pi t)}{\pi t} \cdot \sin(6\pi t)$

Soluzione Esercizio 3 del 1/9/2025

A – Dai dati del problema $S_x(f) = rect(2f)$. Non essendoci l'impulso a frequenza 0 il valor medio del processo è nullo e la varianza (uguale alla potenza) è data dall'integrale di $S_x(f)$ tra -½e ½.

Dunque: $\sigma_x^2 = \frac{1}{2}$ e $m_x = 0$.

L'autocorrelazione è l'antitrasformata di $S_x(f)$: $R_x[m] = \frac{\sin \pi \frac{m}{2}}{\pi m}$

B – I campioni dispari sono a distanza 2 e dunque incorrelati, dunque la varianza della somma è uguale alla somma delle varianze: $4\sigma_x^2 = 2$

C – Dato che $m_x = 0$, la densità di probabilità delle ampiezze uniforme è simmetrica.

Dato che $\sigma_x^2 = \frac{1}{2}$, $\frac{\Delta^2}{12} = \frac{1}{2}$. la densità di probabilità delle ampiezze è uniforme tra $\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Dunque i campioni di $y_n = |x_n|$ avranno densità di probabilità delle ampiezze uniforme tra 0 e $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Da qui: $m_y = \frac{\sqrt{6}}{4}$, $\sigma_y^2 = \frac{6}{48} = 1/8$ e (ovviamente) $P_y = \frac{1}{8} + \frac{6}{16} = \frac{1}{2}$