SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI (Prati)
Terzo Appello – 9 Settembre 2016

La prima parte degli esercizi presenta una difficolta' minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficoltà nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficoltà.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova è 2h.

ESERCIZIO 1

Sia dato un sistema LTI con risposta in frequenza $H(f)=\left[rect\left(f-\frac{1}{2}\right)*rect\left(f+\frac{1}{2}\right)\right]e^{j2\pi f\tau}$.

a - Si traccino i grafici di modulo e fase della risposta in frequenza $H(f)$.

b - Si calcoli l'uscita del sistema all'ingresso $x(t)=\frac{\sin\pi 4(t-2)}{t-2}$.

ESERCIZIO 2

Sia dato il segnale tempo continuo $x(t)=[1-\cos(2\pi f_o(t-\tau))]^2$.

a - Si calcoli la minima frequenza di campionamento f_s per evitare alias in frequenza.

b – – Il segnale dato viene campionato con frequenza di campionamento $f_s=\frac{5}{2}f_o$. Trovare l'espressione del segnale tempo continuo ricostruito dal segnale campionato.

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale stazionario discreto x_n gaussiano con varianza $\sigma_x^2=4$ e valor medio $m_x=-1$.

I campioni di x_n tra loro adiacenti hanno coefficiente di correlazione $\rho_x[1]=-\frac{1}{2}$ e i campioni più distanti sono tra loro incorrelati.

a - Si calcoli autocorrelazione e densità spettrale di potenza del processo x_n.

b - Si calcoli l'espressione del valor medio e dell'autocorrelazione del processo $y_n=4x_n+2x_{n-1}$

SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI (Prati)
Terzo Appello – 9 Settembre 2016
SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a – La risposta in frequenza ha modulo triangolare da -1 a 1 (altezza 1 a *f=0*) e fase lineare che va da $-2\pi\tau$ a $2\pi\tau$ nella banda della risposta in frequenza.
b - La trasformata di Fourier del segnale $x(t)$ è formata da un modulo rettangolare di modulo π, banda 4Hz centrato intorno alla frequenza nulla e fase lineare che va da 8π a -8π nella banda del rettangolo.

La trasformata dell'uscita è

$$Y(f) = tri(f)e^{j2\pi f\tau} \cdot \pi \cdot rect\left(\frac{f}{4}\right)e^{-j4\pi f} = \pi \cdot tri(f)e^{j2\pi f(\tau-2)}$$

L'uscita e' dunque:

$$y(t) = \pi\left(\frac{\sin\pi(t+\tau-2)}{\pi(t+\tau-2)}\right)^2$$

ESERCIZIO 2

a - La trasformata di Fourier del segnale

$$x(t) = [1-\cos(2\pi f_o(t-\tau))]^2 = 1+\cos^2(2\pi f_o(t-\tau)) - 2\cos(2\pi f_o(t-\tau))$$

è data da

$$X(f) = \left\{\frac{3}{2}\delta(f) - [\delta(f+f_o)+\delta(f-f_o)] + \frac{1}{4}[\delta(f+2f_o)+\delta(f-2f_o)]\right\}e^{-j2\pi f\tau}$$

Moltiplicando gli impulsi per l'esponenziale complesso si ottiene:

$$X(f) = \frac{3}{2}\delta(f) - \delta(f+f_o)e^{j2\pi f_o\tau} - \delta(f-f_o)e^{-j2\pi f_o\tau} + \frac{1}{4}\delta(f+2f_o)e^{j4\pi f_o\tau} + \frac{1}{4}\delta(f-2f_o)e^{-j4\pi f_o\tau}$$

La minima frequenza di campionamento per evitare alias in frequenza è dunque $4f_o$.

b – La frequenza di campionamento utilizzata è $\frac{5}{2}f_o$.

Per ricostruire il segnale tempo-continuo è necessario filtrare passa-basso nella banda $\pm\frac{5}{4}f_o$ la trasformata del segnale campionato che si ottiene replicando a passo $\frac{5}{2}f_o$ la trasformata del segnale continuo.

La trasformata di Fourier del segnale ricostruito è dunque:

$$X(f)=\frac{3}{2}\delta(f)-\delta(f+f_o)e^{j2\pi f_o\tau}-\delta(f-f_o)e^{-j2\pi f_o\tau}+\frac{1}{4}\delta\left(f-\frac{f_o}{2}\right)e^{j4\pi f_o\tau}+\frac{1}{4}\delta\left(f+\frac{f_o}{2}\right)e^{-j4\pi f_o\tau}$$

L'espressione del segnale tempo continuo ricostruito dal segnale campionato è:

$$\begin{aligned}x(t)&=\frac{3}{2}-e^{-j2\pi f_o\tau}e^{j2\pi f_o t}-e^{j2\pi f_o\tau}e^{-j2\pi f_o t}+\frac{1}{4}e^{j4\pi f_o\tau}e^{j\pi f_o t}+\frac{1}{4}e^{-j4\pi f_o\tau}e^{-j\pi f_o t}=\\&=\frac{3}{2}-2\cos(2\pi f_o(t-\tau))+\frac{1}{2}\cos(\pi f_o(t+4\tau))\end{aligned}$$

ESERCIZIO 3

a – Dai dati del problema:

$$R_x[m]=\sigma_x^2\delta_m-\frac{\sigma_x^2}{2}\delta_{m-1}-\frac{\sigma_x^2}{2}\delta_{m+1}+m_x^2=4\delta_m-2\delta_{m-1}-2\delta_{m+1}+1$$

La densità spettrale di potenza è la trasformata di Fourier dell'autocorrelazione:

$$S_x(\phi)=4-4\cos(2\pi\phi)+\delta(\phi)$$

b - Il processo y_n può vedersi come uscita di un sistema Lineare Tempo Invariante con risposta all'impulso $h_n=4\delta_n+2\delta_{n-1}$. L'autocorrelazione dell'uscita è data da:

$$\begin{aligned}R_y[m]&=R_x[m]*h_m*h_{-m}=(4\delta_m-2\delta_{m-1}-2\delta_{m+1}+1)*(20\delta_m+8\delta_{m-1}+8\delta_{m+1})=\\&=8\cdot(6\delta_m-\delta_{m-1}-\delta_{m+1}-2\delta_{m-2}-2\delta_{m+2})+36\end{aligned}$$

Il valor medio è $m_y=-6$