TELECOMUNICAZIONI terzo appello – 4 Settembre 2009

La prima parte degli esercizi presenta una difficolta' minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficolta' nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficolta'.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova e' 2h e 15min.

ESERCIZIO 1

Sia dato il segnale continuo $s(t) = \cos^3(2\pi f_0 t)$ con $f_0 = 1MHz$.

a - Si tracci il grafico del modulo e della fase della trasformata di Fourier.
b - Si calcoli l'energia e la potenza del segnale $s(t)$.
c - Si vuole campionare il segnale $s(t)$ con frequenza $f_c = 1/T$ ottenendo la sequenza di campioni $s(nT) = s_n$. Si calcoli il valore minimo di f_c che consente di ricostruire correttamente $s(t)$ a partire dai campioni s_n. Si tracci il grafico della trasformata di Fourier del segnale campionato assumendo f_c uguale al doppio della frequenza minima.
d - Si assuma ora $f_c = 2f_0$, si calcoli la trasformata di Fourier del segnale campionato s_n e l'espressione del segnale ricostruito.

ESERCIZIO 2

Si calcoli la Trasformata Discreta di Fourier dei seguenti segnali di durata *N=100* campioni *(da n=0 a n=99)*:

a - $x_n = \exp(-j2\pi n/10)$
b - $y_n = 1$
c - $z_n = \delta_{n-10}$

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo discreto $x_n = \cos(\pi n + \theta) + w_n$ dove θ e' una variabile casuale uniformemente distribuita, $\theta \sim U[-\pi,\pi]$, w_n e' un processo bianco a media nulla e potenza σ^2.

a - Si calcoli il valor medio, la varianza, l'autocorrelazione e l'auto-covarianza del processo. Si dica se il processo e' stazionario, giustificando la risposta.
b - Si trovi l'espressione dell'autocovarianza del processo z_n ottenuto filtrando x_n con un filtro a risposta impulsiva $h_n = \delta_n - \frac{1}{2}\delta_{n-1} + \frac{1}{2}\delta_{n+1}$

Soluzione Esercizio 1

a. Si tracci modulo e fase della trasformata di Fourier di $s(t)$ si calcoli energia e potenza

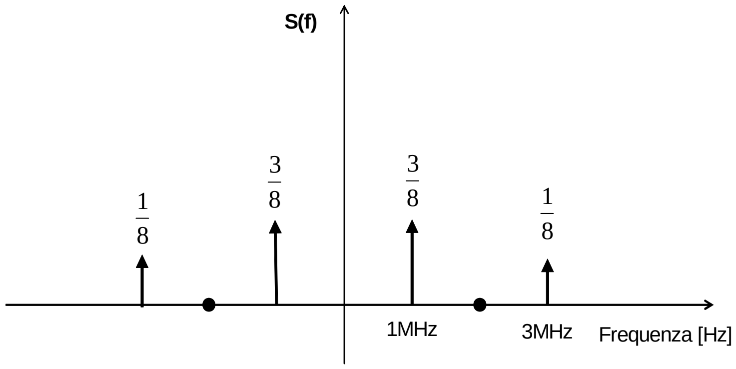

Figura 1:

Il segnale $s(t)$ puo' essere decomposto utilizzando l'identita' notevole $\cos(x)+\cos(y) = 2\cos[(x+y)/2]\cos[(x-y)/2]$ da cui

$$\begin{aligned} s(t) &= \cos^3(2\pi f_0 t) = \left[\frac{1+\cos(4\pi f_0 t)}{2}\right]\cos(2\pi f_0 t) = \\ &= \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 t) + \frac{1}{2}\cos(4\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0 t) = \\ &= \frac{3}{4}\cos(2\pi f_0 t) + \frac{1}{4}\cos(6\pi f_0 t) \end{aligned}$$

La trasformata di Fourier $S(f)$ diventa

$$S(f) = \frac{3}{8}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)] + \frac{1}{8}[\delta(f-3f_0)+\delta(f+3f_0)]$$

la fase e' nulla il modulo e' plottato in figura 1. L'energia del segnale e' chiaramente infinita (si tratta di un segnale periodico), la potenza coincide con la somma delle potenze delle due sinusoidi che costituiscono il segnale $s(t)$

$$P_{s(t)} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{10}{32} = 0.31$$

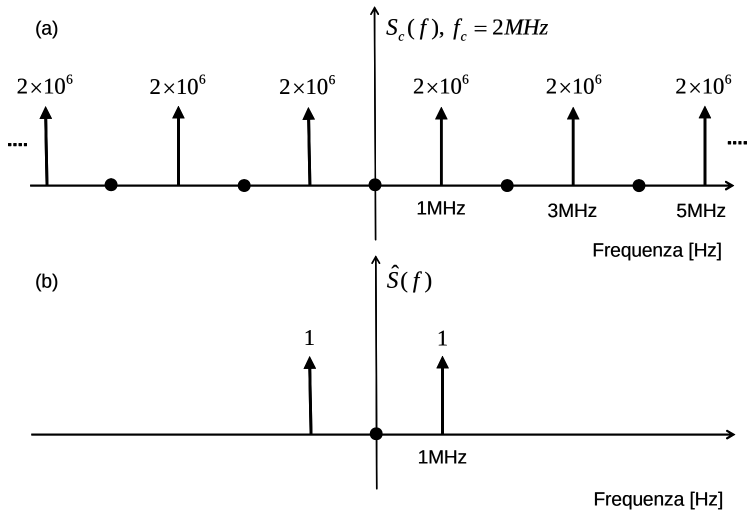

Figura 2:

b. Frequenza di campionamento e ricostruzione

Il valore minimo della frequenza di campionamento che consente di ricostruire correttamente $s(t)$ vale $f_c = 6f_0$ (la massima frequenza del segnale $s(t)$ e' infatti $3f_0$). Per la procedura di ricostruzione, si veda la teoria. La trasformata di Fourier del segnale campionato $S_c(f)$ e' la periodicizzazione (scalata) a passo f_c della trasformata $S(f)$ ovvero per $f_c = 12f_0$

$$S_c(f) = f_c \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(f - f_c) = 12f_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(f - 12kf_0)$$

c. Trasformata del segnale discreto per $f_c = 2f_0$, effetto dell'aliasing sul segnale ricostruito

Dato che la nuova frequenza di campionamento e' inferiore alla minima necessaria per ricostruire correttamente $s(t)$ il segnale ricostruito subira' l'effetto dell'aliasing. La trasformata di Fourier del segnale discreto $S_c(f)$ campionato a passo $f_c = 2f_0$ e' visualizzata in figura 2.a (ottenuta dalla ripetizione periodic adi $S(f)$ a passo $f_c = 2f_0 = 2MHz$). La trasformata $\hat{S}(f)$ del segnale ricostruito $\hat{s}(t)$ e' mostrata in figura 2.b., da cui

$$\hat{s}(t) = 2\cos(2\pi f_0 t)$$

Soluzione Esercizio 2

a. $X_k = N\delta_{k+10}$
b. $Y_k = N\delta_k$
c. $Z_k = \exp(-j2\pi k/10)$

Soluzione Esercizio 3

*a.*Si calcoli il valor medio, la varianza, l'autocorrelazione e l'auto-covarianza del processo. Valutare infine se il processo e' stazionario.

Il valore atteso

$$\begin{aligned} E[x_n] &= E_{w_n\theta}[A\cos(\pi n + \theta) + w_n] = E_\theta[\cos(\pi n + \theta)] + E_{w_n}[w_n] = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A\cos(\pi n + \theta)d\theta = 0 \end{aligned}$$

dove $E_{w_n}[w_n] = 0$ e $\int_{-\pi}^{\pi} A\cos(\frac{\pi}{2}n + \theta)d\theta = 0$ in quanto l'integrale e' svolto su un periodo della cosinusoide.

Per calcolare l'autocorrelazione si definisce il processo $c_n = A\cos(\pi n + \theta)$ in modo che $x_n = c_n + w_n$

$$\begin{aligned} R_{x_n}(m) &= E[x_n x_{n+m}] = E_{w_n\theta}[(c_n + w_n)(c_{n+m} + w_{n+m})] = \\ &= E_\theta[c_n c_{n+m}] + E_{w_n}[w_n w_{n+m}] = \\ & \quad E_\theta[c_n c_{n+m}] + \sigma^2\delta_m \end{aligned}$$

infatti si noti che $E_{w_n\theta}[c_n w_{n+m}] = E_\theta[c_n]E_{w_n}[w_{n+m}] = E_{w_n\theta}[c_{n+m}w_n] = E_\theta[c_{n+m}]E_{w_n}[w_n] = 0.$

$$\begin{aligned} E_\theta[c_n c_{n+m}] &= E_\theta[A^2\cos(\pi n + \theta)\cos(\pi(n+m) + \theta)] = \\ &= E_\theta[\frac{1}{2}\cos(\pi m)] + E_\theta[\frac{1}{2}\cos(\pi(2n+m) + 2\theta))] = \\ &= \frac{1}{2}\cos(\pi m) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\cos(\pi(2n+m) + 2\theta)d\theta = \\ &= \frac{1}{2}\cos(\pi m) \end{aligned}$$

quindi

$$R_{x_n}(m) = E[x_n x_{n+m}] = \frac{\cos(\pi m)}{2} + \sigma^2\delta_m$$

Il processo e' stazionario. L'autocovarianza $C_{x_n}(m) = R_{x_n}(m) - E[x_n]^2$ coincide con l'autocorrelazione (il processo e' a media nulla). La varianza vale

$$\begin{aligned} var(x_n) &= E[x_n^2] - E[x_n]^2 = \\ &= R_{x_n}(0) = \frac{1}{2} + \sigma^2 \end{aligned}$$

b. Si trovi l'espressione dell'autocovarianza di z_n ottenuta filtrando x_n con un filtro a risposta impulsiva $h_n = \delta_n - \frac{1}{2}\delta_{n-1} + \frac{1}{2}\delta_{n+1}$.

Per risolvere l'esercizio si pue' per esempio operare nel dominio delle frequenze. La densita' spettrale di potenza (DSP) del processo x_n vale

$$S_{x_n}(f) = \mathcal{F}(R_{x_n}(m)) = \frac{1}{4}\delta(f - \frac{1}{2}) + \frac{1}{4}\delta(f + \frac{1}{2}) + \sigma^2$$

La DSP di $z_n = h_n * x_n$

$$S_{z_n}(f) = \mathcal{F}(h_n * h_{-n} * R_{x_n}(m)) = |H(f)|^2 \, S_{x_n}(f)$$

dove $H(f)$ e' la trasformata di Forurier di h_n, $H(f) = \mathcal{F}(h_n) = 1 - \frac{1}{2}\exp(-j2\pi f) + \frac{1}{2}\exp(j2\pi f) = 1 + j\sin(2\pi f)$, inoltre

$$|H(f)|^2 = 1 + \sin^2(2\pi f)$$

$$\begin{aligned} S_{z_n}(f) &= |H(f)|^2 \, S_{x_n}(f) = \\ &= \left[1 + \sin^2(2\pi f)\right] \times \left[\frac{1}{4}\delta(f - \frac{1}{2}) + \frac{1}{4}\delta(f + \frac{1}{2}) + \sigma^2\right] = \\ &= \sigma^2 \left[1 + \sin^2(2\pi f)\right] + \frac{1}{4}\delta(f - \frac{1}{2}) + \frac{1}{4}\delta(f + \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

Risaliamo ora all'autocorrelazione di z_n come antitrasformata della DSP $S_{z_n}(f)$, $R_{z_n}(m) = \mathcal{F}^{-1}(S_{z_n}(f))$

$$\begin{aligned} R_{z_n}(m) &= \sigma^2 \left[h_m * h_{-m}\right] + \frac{1}{2}\cos(\pi m) = \\ &= 2\sigma^2 \delta_m - \frac{\sigma^2}{4}\delta_{m-2} - \frac{\sigma^2}{4}\delta_{m+2} + \frac{1}{2}\cos(\pi m) \end{aligned}$$

si ricordi che $\mathcal{F}^{-1}(|H(f)|^2) = h_n * h_{-n}$, dove

$$h_m * h_{-m} = 2\delta_m - \frac{1}{4}\delta_{m-2} - \frac{1}{4}\delta_{m+2}.$$

L'autocovarianza di z_n coincide con l'autocorrelazione in quanto $E[z_n] = 0$, infatti $E[z_n] = E[h_n * x_n] = h_n * E[x_n] = E[x_n] \sum h_n = E[x_n] H(0) = 0$.