SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI (Prati)
Appello – 27 Agosto 2019

La prima parte degli esercizi presenta una difficoltà minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficoltà nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficoltà.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova è 2h.

ESERCIZIO 1

Sia dato un sistema LTI con risposta in frequenza $H(f)=\frac{1}{20}\left[\frac{\sin(20\pi f)}{\pi f}\right]^2 \exp\{j10\pi f\}$.

a - Si tracci il grafico della risposta all'impulso *h(t)*.

b - Il segnale d'ingresso *x(t)* ha la seguente trasformata di Fourier $X(f)=\delta(f)+\delta(f-1)+\delta(f+1)$. Si calcoli l'espressione dell'uscita *y(t)* del sistema dato e la sua potenza.

ESERCIZIO 2

Sia dato il segnale tempo-continuo $x(t)=1+\sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\frac{\pi}{8}\right)$. Il segnale *x(t)* viene campionato a passo T secondi ottenendo la sequenza x_n.

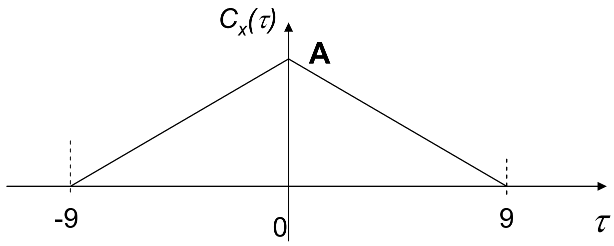
a – Si calcoli la trasformata di Fourier $\widetilde{X}(f)$ e la trasformata di Fourier in frequenza normalizzata $\widetilde{X}(\phi)$ della sequenza x_n.

b – Si trovi l'espressione del segnale ricostruito.

c – Si calcoli l'espressione della DFT di 100 campioni di x_n con $0 \le n \le 99$.

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale continuo *x(t)* stazionario con densità di probabilità delle ampiezze uniforme nell'intervallo -1 ~ +3 e autocovarianza triangolare mostrata in figura.



a - Si calcoli il valore di **A**, della varianza e della potenza di $x(t)$.

b – Si calcoli valor medio e varianza del processo casuale $y(t)=x(t+4)-x(t-4)$

<u>SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI (Prati)</u>
<u>Appello – 27 Agosto 2019</u>

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a - La risposta all'impulso *h(t)* è un triangolo di ampiezza unitaria nell'intervallo $-25 \le t \le 15$.

b - Nelle frequenze abbiamo:

$$Y(f) = X(f)H(f) = [\delta(f) + \delta(f+1) + \delta(f-1)] \cdot \frac{1}{20}\left[\frac{\sin(20\pi f)}{\pi f}\right]^2 \exp\{j10\pi f\} = 20\delta(f)$$

Antitrasformando si ottiene *y(t)*=20 la cui potenza è 400.

ESERCIZIO 2

a - La trasformata di Fourier del segnale tempo continuo $x(t) = 1 + \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{8}\right)$ è:

$$X(f) = \delta(f) + \frac{j}{2}e^{-j\pi/8}\delta\left(f + \frac{1}{T}\right) - \frac{j}{2}e^{j\pi/8}\delta\left(f - \frac{1}{T}\right)$$

La trasformata di Fourier della sequenza della sequenza x_n e':

$$\widetilde{X}(f) = \frac{1}{T}\left[\delta(f) + \frac{j}{2}e^{-j\pi/8}\delta\left(f + \frac{1}{T}\right) - \frac{j}{2}e^{j\pi/8}\delta\left(f - \frac{1}{T}\right)\right]$$ periodica in frequenza con periodo *1/T*.

Dunque:

$$\widetilde{X}(f) = \frac{1}{T}\delta(f)\left[1 + \frac{j}{2}e^{-j\pi/8} - \frac{j}{2}e^{j\pi/8}\right] = \frac{1}{T}\delta(f)\cdot[1 + \sin(\pi/8)]$$ periodica in frequenza con periodo *1/T*

$$\widetilde{X}(\phi) = \frac{1}{T}\delta\left(\frac{\phi}{T}\right)\left[1 + \frac{j}{2}e^{-j\pi/8} - \frac{j}{2}e^{j\pi/8}\right] = \delta(\phi)\cdot[1 + \sin(\pi/8)]$$ periodica in frequenza con periodo unitario.

b - Il segnale ricostruito è ovviamente una costante $x_R(t) = 1 + \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ e anche la sequenza x_n è data dalla stessa costante, quindi …

c - l'espressione della DFT di 100 campioni di x_n con $0 \le n \le 99$ è:

$$X_k = 100\left(1 + \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)\delta_k$$

ESERCIZIO 3

b - La costante **A** si trova immediatamente sapendo che la densità di probabilità delle ampiezze del processo casuale dato è uniforme e notando che:

$$A = C_x(0) = \sigma_x^2 = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{4}{3}$$

Il valor medio del processo dato è ovviamente unitario come suggerisce la densità di probabilità delle ampiezze.

La potenza è dunque: $\sigma_x^2 + m_x^2 = \frac{7}{3}$

b - Il valor medio del processo casuale $y(t) = x(t+4) - x(t-4)$ (che è stazionario) è ovviamente nullo:

$$m_y = E[y(t)] = E[x(t+4) - x(t-4)] = E[x(t+4)] - E[x(t-4)] = 1 - 1 = 0\,.$$

La varianza del processo casuale *y(t)* si ottiene facilmente dalla definizione:

$$\begin{aligned}
&\sigma_y^2 = E[y^2(t)] = E\left[\{x(t+4) - x(t-4)\}^2\right] = \\
&E[x^2(t+4)] + E[x^2(t-4)] - 2E[x(t-4)x(t+4)] = \\
&= 2\sigma_x^2 - 2R_x(8) = \frac{8}{3} - \frac{8}{27} = \frac{64}{27}
\end{aligned}$$