SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI appello del 15 Settembre 2017

La prima parte degli esercizi presenta una difficolta' minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficolta' nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficolta'.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova è 2h.
I punteggi indicano il peso relativo dell'esercizio.

ESERCIZIO 1

Si consideri il segnale $x(t)=\dfrac{\sin(\pi Bt)}{\pi t}$.

a - Si calcoli l'espressione della trasformata di Fourier del segnale $y(t)=x(t-\tau)+x(t+\tau)$.

b - Si traccino i grafici di modulo e fase di $Y(f)$ nel caso in cui $\tau=\dfrac{1}{B}$.

c - Si calcoli la seguente convoluzione $z(t)=y(t)*\left[e^{j\left(2\pi B\frac{t}{2}\right)}+e^{j\left(2\pi B\frac{t}{8}\right)}+e^{j\left(2\pi B\frac{t}{4}\right)}\right]$ sempre nel caso in cui $\tau=\dfrac{1}{B}$.

ESERCIZIO 2

Si consideri il segnale tempo-continuo $x(t)=\dfrac{\sin(\pi Bt)}{\pi t}\sin\left(2\pi\dfrac{B}{2}t\right)$.

Il segnale $x(t)$ viene campionato con frequenza di campionamento $f_s=\dfrac{3}{2}B$ ottenendo il segnale discreto x_n.

a - Si traccino i grafici della Trasformata di Fourier del segnale x_n sia in frequenza che in frequenza normalizzata.

b - Si calcoli l'espressione del segnale tempo continuo ricostruito dai campioni di x_n.

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale gaussiano stazionario $x(t)$ con valor medio m_x e potenza P_x. Il coefficiente di correlazione dei campioni di $x(t)$ si annulla dopo 1ms e da lì in poi rimane nullo.

a - Si scriva l'espressione dell'autocorrelazione e della densità spettrale di potenza del processo casuale x_n ottenuto campionando il processo dato con frequenza di campionamento di 500Hz.

b – Si scriva l'espressione della densità di probabilità delle ampiezze del processo casuale y_n ottenuto filtrando x_n con la risposta in frequenza $H(\phi)=1+\cos 2\pi\phi$.

SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI appello del 15 Settembre 2017

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a) La trasformata di Fourier del generico segnale $y(t) = x(t-\tau) + x(t+\tau)$ ha la seguente espressione:

$$Y(f) = X(f) \cdot \left[\exp\{-j2\pi f \tau\} + \exp\{-j2\pi f \tau\}\right] = 2X(f) \cdot \cos(2\pi f \tau)$$

Nel caso specifico in cui $x(t) = \dfrac{\sin(\pi Bt)}{\pi t}$, abbiamo:

$$X(f) = rect\left(\frac{f}{B}\right)$$
$$Y(f) = 2rect\left(\frac{f}{B}\right) \cdot \cos(2\pi f \tau)$$

b) Nel caso in cui $\tau = \dfrac{1}{B}$, il periodo di $\cos(2\pi f \tau)$ è uguale a B, dunque il modulo di $Y(f) = 2rect\left(\dfrac{f}{B}\right) \cdot \cos\left(2\pi \dfrac{f}{B}\right)$ è il modulo di un solo periodo di coseno di ampiezza 2 nella banda $-\dfrac{B}{2} < f < \dfrac{B}{2}$, mentre la fase è nulla nella banda $-\dfrac{B}{4} < f < \dfrac{B}{4}$ e uguale a π altrove.

c) Moltiplicando nel dominio della frequenza, le aree dei tre impulsi alle frequenze $\dfrac{B}{2}$, $\dfrac{B}{8}$ e $\dfrac{B}{4}$ vengono moltiplicate rispettivamente per -2, $\sqrt{2}$ e 0.

Anti-trasformando nel dominio del tempo si ottiene:

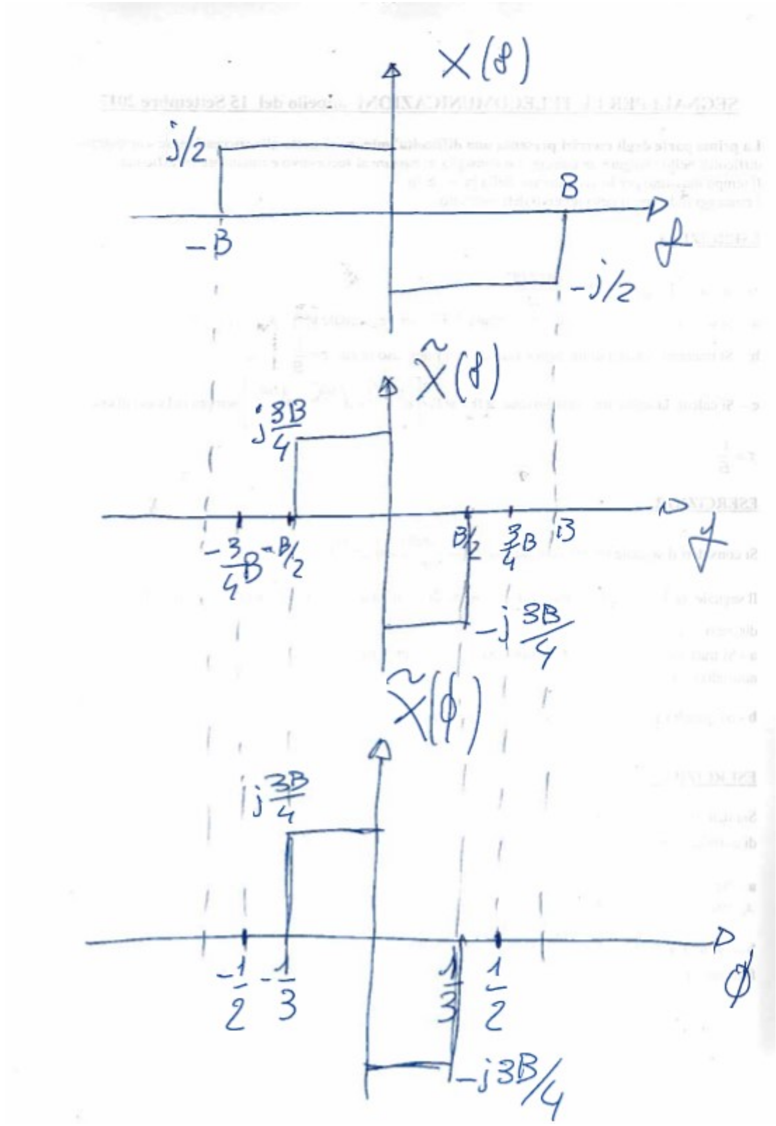
$$z(t) = \left[-2e^{j\left(2\pi B\frac{t}{2}\right)} + \sqrt{2}e^{j\left(2\pi B\frac{t}{8}\right)} \right]$$

ESERCIZIO 2

a – La trasformata $X(f)$ è formata da due rettangoli di banda B, ampiezza $-\frac{j}{2}$ e $+\frac{j}{2}$ centrati rispettivamente in $\frac{B}{2}$ e $-\frac{B}{2}$.

La minima frequenza di campionamento per evitare alias è dunque $2B$.

A causa del campionamento si creano delle cancellazioni ottenendo i seguenti grafici delle trasformate in frequenza e frequenza normalizzata.



b – A causa delle cancellazioni introdotte dall'alias in frequenza, il segnale ricostruito ha la seguente espressione:

$$x(t) = \frac{\sin\left(\pi \frac{B}{2} t\right)}{\pi t} \sin\left(2\pi \frac{B}{4} t\right)$$

ESERCIZIO 3

a – Dai dati del problema si sa che il processo casuale discreto è bianco, dunque:

$$R_x[m] = \sigma_x^2 \delta_m + m_x^2$$

$S_x(\phi) = \sigma_x^2 + \delta(\phi)$ periodica di periodo 1

b – Il processo x_n è gaussiano quindi lo sarà anche y_n. E' dunque sufficiente calcolare valor medio e varianza di y_n.

$$m_y = m_x \cdot H(0) = 2m_x$$
$$\sigma_y^2 = \int S_y(\phi) d\phi$$

dove

$$S_y(\phi) = S_x(\phi)(1+\cos 2\pi\phi)^2$$

da cui $R_y[0] = \int S_y(\varphi) d\varphi = (1+1/2)\sigma_x^2 + 4|m_x|^2 = 3/2 \cdot \sigma_x^2 + 4|m_x|^2$

$$\sigma_y^2 = R_y[0] - |m_y|^2 = 3/2 \cdot \sigma_x^2$$

Procedimento alternativo:

Il processo x_n viene convoluto con la seguente risposta all'impulso: $h_n = \delta_n + 1/2\delta_{n-1} + 1/2\delta_{n+1}$

$$m_y = m_x \cdot 2$$

$$\sigma_y^2 = R_y[0] - |m_y|^2$$

$$R_y[m] = R_x[m] * h_m * h_{-m} = \left(\sigma_x^2 \delta_m + m_x^2\right) * \left(1/4\delta_{m+2} + \delta_{m+1} + 3/2\delta_m + \delta_{m-1} + 1/4\delta_{m-2}\right)$$

$$R_y[0] = 3/2 \cdot \sigma_x^2 + 4|m_x|^2$$

$$\sigma_y^2 = R_y[0] - |m_y|^2 = 3/2 \cdot \sigma_x^2$$