SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI terzo appello – 15 Settembre 2015

Il tempo massimo per lo svolgimento della prova è 2h.

ESERCIZIO 1

Sia dato un sistema LTI con risposta all'impulso $h(t) = rect\left(\frac{t}{10}\right) * rect\left(\frac{t}{10}\right) * \left[rect\left(\frac{t}{15}\right)\exp\left\{j2\pi\frac{1}{5}t\right\}\right]$.

a - Si calcoli l'espressione della risposta in frequenza $H(f)$ e si trovino le frequenze alle quali $H(f) = 0$

b- Si calcoli l'uscita *y(t)* e la sua potenza quando all'ingresso del sistema si pone il segnale
$x(t) = \exp\left\{j2\pi\frac{t}{5}\right\} + \exp\left\{j2\pi\frac{t}{10}\right\} + \exp\left\{j2\pi\frac{t}{15}\right\}$

ESERCIZIO 2

Il segnale tempo continuo $x(t) = 7\frac{\sin 14\pi t}{\pi t}\exp\{j10\pi t\}$ viene campionato con frequenza di campionamento $f_s = 16$ Hz ottenendo il segnale discreto x_n.

a - Si ricavi l'espressione della trasformata di Fourier $\tilde{X}(f)$ del segnale discreto x_n.

b - Si ricavi l'espressione della trasformata di Fourier in frequenza normalizzata $\tilde{X}(\phi)$ del segnale discreto x_n.

c - Si ricavi l'espressione del segnale tempo continuo ricostruito dai campioni di x_n.

ESERCIZIO 3

La potenza del processo casuale stazionario *x(t)*, con valor medio 10, vale 500. Il coefficiente di correlazione del processo casuale vale $\rho_x(\tau) = \frac{1}{4}\frac{\sin(\pi 4\tau)}{\pi\tau}$.

a - Si scriva l'espressione della densità spettrale di potenza del processo casuale *x(t)*.

b - Il processo casuale viene campionato con frequenza di campionamento $f_s = 8$ Hz generando il processo casuale discreto x_n. Quanto vale la varianza di $(x_1 + x_3 - x_5)$?

c - E la varianza di $(x_1 + x_2 + x_3)$?

SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI terzo appello – 15 Settembre 2015

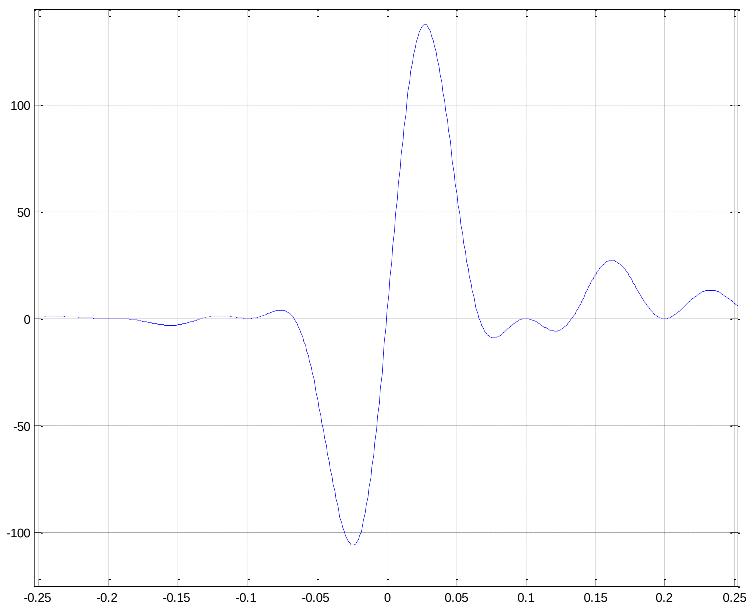
SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a – La risposta all'impulso data è formata dalla convoluzione di 3 segnali. La sua trasformata di Fourier è data dal prodotto delle 3 trasformate:

$$H(f) = \left(\frac{\sin \pi 10 f}{\pi f} \right)^2 \frac{\sin \pi 15\left(f - \frac{1}{5} \right)}{\pi\left(f - \frac{1}{5} \right)}$$

Gli zeri di questa funzione si trovano alle frequenze $\frac{k}{10}$ con $k \neq 0$ e $\frac{k}{15}$ con $k \neq 3$



b - La trasformata di Fourier dell'ingresso vale:

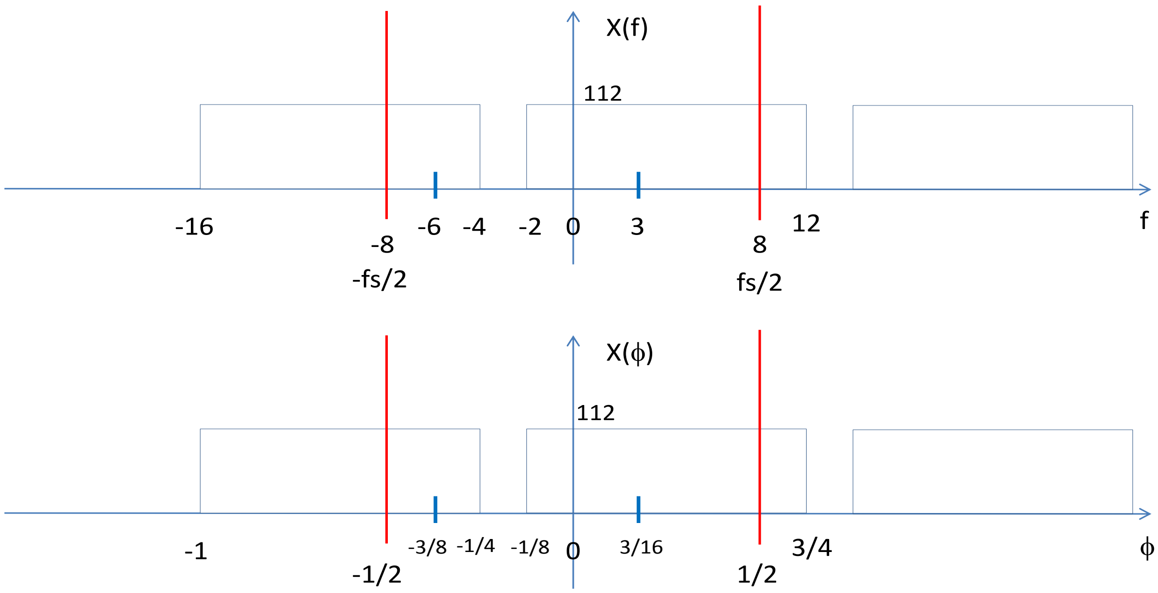
$$X(f) = \delta\left(f - \frac{1}{5} \right) + \delta\left(f - \frac{1}{10} \right) + \delta\left(f - \frac{1}{15} \right)$$

Dato che $H(f) = 0$ alle frequenze $f = \frac{1}{15}$ e $f = \frac{1}{10}$ e $f = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, tutte le componenti vengono annullate.

La trasformata dell'uscita, l'uscita e la sua potenza sono dunque nulle.

ESERCIZIO 2

a e **b** – La trasformata $\tilde{X}(f)$ del segnale discreto ha periodicità $f_s = 16$ ed è rappresentata in figura insieme alla trasformata periodica di periodo 1 in frequenza normalizzata $\tilde{X}(\phi)$.



Le loro espressioni sono rispettivamente:

$$\tilde{X}(f) = 112 \sum_{k=-\infty}^{\infty} rect\left(\frac{f+16k-5}{14}\right) \quad \text{e} \quad \tilde{X}(\phi) = 112 \sum_{k=-\infty}^{\infty} rect\left(\frac{\phi + k - 5/16}{7/8}\right)$$

c – Il segnale tempo continuo si ricostruisce applicando il filtro di ricostruzione alla trasformata $\tilde{X}(f)$.
Il filtro di ricostruzione è rettangolare nella banda $-\frac{f_s}{2} < f < \frac{f_s}{2}$ di ampiezza $\frac{1}{f_s}$.
Dunque la trasformata di Fourier del segnale tempo continuo ricostruito è::

$$X_R(f) = 7rect\left(\frac{f-3}{10}\right) + 7rect\left(\frac{f+6}{4}\right)$$

Da qui l'espressione del segnale tempo continuo ricostruito:

$$x_R(t) = 7\frac{\sin 10\pi t}{\pi t}\exp\{j6\pi t\} + 7\frac{\sin 4\pi t}{\pi t}\exp\{-j12\pi t\}$$

ESERCIZIO 3

a – Dai dati del problema: $\sigma_x^2 = P - m_x^2 = 500 - 100 = 400$ e quindi l'autocorrelazione ha la seguente espressione:

$$R_x(\tau)=\sigma_x^2\rho_x(\tau)+m_x^2=100\frac{\sin(\pi 4\tau)}{\pi\tau}+100$$

La densità spettrale di potenza vale $S_y(f)=100\delta(f)+100rect\left(\frac{f}{4}\right)$

b - Il valor medio e la varianza del processo campionato sono uguali a quelli del processo tempo continuo.

L'autocorrelazione del processo discreto si ottiene campionando quella del processo tempo continuo:

$$R_x[m]=800\frac{\sin\left(\pi\frac{m}{2}\right)}{\pi m}+100$$

Campioni a distanza 2 o multipli di 2 sono tra di loro incorrelati e la varianza della loro DIFFERENZA e della loro SOMMA è uguale alla **SOMMA** delle varianze.

$$\sigma^2_{(x_1+x_3-x_5)}=3\sigma_x^2=1200$$

Se si volessero eseguire tutti i passaggi matematici si procederebbe nel modo seguente:

Il valor medio di $(x_1+x_3-x_5)$ è $(10+10-10)=10$

La varianza di $(x_1+x_3-x_5)$ è:

$$\sigma^2_{(x_1+x_3-x_5)}=E\left[x_1^2+x_3^2+x_5^2+2x_1x_3-2x_1x_5-2x_3x_5\right]-100=3R_x[0]-2R_x[4]-100$$

$$R_x[0]=500$$

$$R_x[4]=100$$

$$\sigma^2_{(x_1+x_3-x_5)}=1500-200-100=1200$$

c - Il valor medio di $(x_1+x_2+x_3)$ è uguale a 30.

$$\sigma^2_{x_1+x_2+x_3}=E\left[x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3\right]=3R_x[0]+2R_x[2]+4R_x[1]-900$$

$$R_x[0]=500$$
$$R_x[1]=\frac{800}{\pi}+100$$
$$R_x[2]=100$$

Da cui:

$$\sigma^2_{x_1+x_2+x_3}=1500+\frac{3200}{\pi}+400+200-900\approx 2200$$