SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI (Prati)
Appello – 14 Settembre 2018

La prima parte degli esercizi presenta una difficolta' minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficolta' nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficolta'.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova è 2h.

ESERCIZIO 1

Sia dato il segnale $x(t) = \left[\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right]^2 * 2 \cdot \sin(\pi t)$ dove $*$ indica la convoluzione.

a - Si tracci il grafico della trasformata di Fourier del segnale dato.

b- Si calcoli l'uscita $y(t)$ del sistema LTI con risposta in frequenza $H(f) = j \cdot f$ quando all'ingresso del sistema si pone il segnale $x(t)$ dato.

ESERCIZIO 2

Sia dato il segnale tempo continuo $x(t) = \frac{\sin \pi B t}{\pi t} \cdot [1 + 2\cos(4\pi B t)]$.

a – Il segnale dato viene campionato con frequenza di campionamento $f_s = 2B$ Hz. Tracciare il grafico della trasformata di Fourier del segnale campionato x_n sia in frequenza che in frequenza normalizzata.

c –Trovare l'espressione del segnale tempo continuo ricostruito dal segnale campionato x_n.

ESERCIZIO 3

Sia dato un processo casuale stazionario tempo-continuo gaussiano $x(t)$ a valor medio m_x e varianza σ_x^2. La densità spettrale di potenza del processo è $S_x(f) = 15 \cdot rect\left(\frac{f}{10}\right) + 20\delta(f)$.

a - Si trovino potenza, varianza del processo casuale dato.

b – Si trovino potenza, varianza e valor medio del processo casuale $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$.

c – Il processo casuale $x(t)$ viene campionato con frequenza di campionamento $f_s = 5$ Hz generando il processo casuale discreto x_n. Si trovi la varianza del processo casuale

$z_n = x_n - \frac{1}{2} x_{n-1} + \frac{1}{4} x_{n-2} - \frac{1}{8} x_{n-3} + \frac{1}{16} x_{n-4}$

SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI (Prati)
Appello – 14 Settembre 2018

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a – La trasformata di Fourier del segnale dato ha la seguente espressione:

$$X(f) = rect(f) * rect(f) \cdot \left[\frac{j}{2}\delta(f+1/2) - \frac{j}{2}\delta(f+1/2) \right] \cdot 2 =$$
$$= \frac{j}{2}\delta(f+1/2) - \frac{j}{2}\delta(f-1/2)$$

Il grafico può essere tracciato solo per la parte immaginaria ed è composto da 2 impulsi di area +- 1/2 alle frequenze -+ ½.

b –La trasformata di Fourier dell'uscita vale:

$$Y(f) = X(f)H(f) = \left[\frac{j}{2}\delta(f+1/2) - \frac{j}{2}\delta(f-1/2) \right] \cdot j \cdot f =$$
$$= \frac{1}{4}\delta(f+1/2) + \frac{1}{4}\delta(f-1/2)$$

L'uscita ha la seguente espressione:

$$y(t) = \frac{1}{2}\cos(\pi t)$$

ESERCIZIO 2

a - La trasformata di $x(t) = \frac{\sin \pi Bt}{\pi t} \cdot [1 + 2\cos(4\pi Bt)]$ è $X(f) = rect\left(\frac{f}{B}\right) + rect\left(\frac{f}{B} - 2\right) + rect\left(\frac{f}{B} + 2\right)$.
La banda bilatera del segnale è $5B$, quindi campionando con frequenza di campionamento $f_s = 2B$ s'introduce alias.

Campionando il segnale con $f_s = 2B$ si ottiene il segnale x_n la cui trasformata di Fourier $\widetilde{X}(f)$ è data da:

$\widetilde{X}(f) = 6B \cdot rect\left(\frac{f}{B}\right)$ periodica di periodo $f_s = 2B$.

Passando alla frequenza normalizzata $\phi = \frac{f}{f_s}$, si ottiene:

$\widetilde{X}(\phi) = 6B \cdot rect\left(\frac{\phi \cdot f_s}{B}\right) = 6B \cdot rect(2\phi)$ periodica di periodo unitario.

b – Il segnale tempo continuo ricostruito dai campioni di x_n si ottiene antitrasformando un solo periodo di $\widetilde{X}(f)$ moltiplicata per $\frac{1}{f_s} = \frac{1}{2B}$. Quindi la trasformata del segnale ricostruito sarà:

$X_R(f) = 3 \cdot rect\left(\frac{f}{B}\right)$

Il segnale ricostruito: $x_R(t) = 3\frac{\sin \pi Bt}{\pi t}$

ESERCIZIO 3

a - La potenza del processo casuale si trova integrando la sua densità spettrale: $P_x = 170$.
La varianza è data da: $\sigma_x^2 = P_x - m_x^2 = 170 - 20 = 150$ (l'area dell'impulso della densità spettrale è uguale al quadrato del valor medio).

'autocorrelazione del processo si ricava immediatamente dalla definizione di coefficiente di correlazione:

$$R_x[m] = \sigma_x^2 \rho_x[m] + m_x^2 = \sigma_x^2 \left[\delta_m + \frac{1}{2}\delta_{m\pm1} + \frac{1}{4}\delta_{m\pm2} \right] + m_x^2$$

b - La densità spettrale di potenza di $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ si trova ricordando che nel dominio della frequenza la derivata prima di un segnale si ottiene moltiplicando la sua trasformata per $H(f) = j2\pi f$. Dunque:

$$S_y(f) = S_x(f) \cdot |H(f)|^2 = \left[15 \cdot rect\left(\frac{f}{10}\right) + 20\delta(f) \right] \cdot 4\pi^2 f^2 = 60 \cdot rect\left(\frac{f}{10}\right) \cdot \pi^2 f^2$$

Il valor medio di $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ è ovviamente nullo dato che $m_y = m_x H(0)$.
Quindi la varianza coincide con il valore quadratico medio (la potenza):

$$\sigma_y^2 = 60 \cdot \pi^2 \int_{-5}^{5} f^2 df = 60 \cdot \pi^2 \left. \frac{f^3}{3} \right|_{-5}^{5} = 5000 \cdot \pi^2$$

c - L'autocorrelazione del processo dato (antitrasformata della densità spettrale di potenza) è costituito da una costante (20) sommata ad un seno cardinale con zeri a passo $\frac{1}{10}$ di secondo. Campionando a $\frac{1}{5}$ di secondo si cade esattamente negli zeri dell'autocorrelazione e dunque i campioni del processo discreto sono tra loro indipendenti.

La varianza della somma è dunque uguale alla somma delle varianze e il risultato richiesto si calcola allora banalmente:

$$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} \right) = \frac{85}{64} \sigma_x^2$$