SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI (Prati)
appello del 10 Settembre 2012

La prima parte degli esercizi presenta una difficolta' minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficolta' nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficolta'.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova e' 1h e 50min.

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema LTI che ha la seguente risposta in frequenza:
$$H(f) = rect\left(\frac{f}{100}\right) - rect\left(\frac{f-75}{100}\right) - rect\left(\frac{f+75}{100}\right)$$
a [6] - Si traccino i grafici di modulo e fase della risposta in frequenza data.
b [6] - Si calcoli l'espressione dell'uscita del sistema dato quando all'ingresso viene posto il segnale $x(t) = \dfrac{\sin \pi 160 t}{\pi t}$.

ESERCIZIO 2

Sia dato il segnale tempo continuo $x(t) = \dfrac{\sin(\pi t)}{(\pi t)} \exp\{j2\pi(t+1)\}$ che viene campionato con frequenza di campionamento $f_s = 2.5Hz$.

a [6] – Si tracci il grafico della trasformata di Fourier del segnale campionato x_n.
b [6] – Si trovi l'espressione del segnale tempo continuo ricostruito da x_n.

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale gaussiano stazionario $x(t)$ con densità spettrale di potenza
$$S_x(f) = rect\left(\frac{f}{27}\right) + 19\delta(f).$$
a [6] – Si trovi la potenza del processo dato e se ne scrivano le espressioni dell'autocorrelazione e del coefficiente di correlazione.
b [6] – Si calcoli la potenza de processo casuale ottenuto filtrando il processo dato con il sistema LTI che ha la seguente risposta impulsiva: $h(t) = \left[3\dfrac{\sin(\pi t)}{(\pi t)}\right]^2$.

TELECOMUNICAZIONI appello del 10 Settembre 2012

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a – Modulo e fase dell aisposta in frequenza data sono mostrate in figura 1.

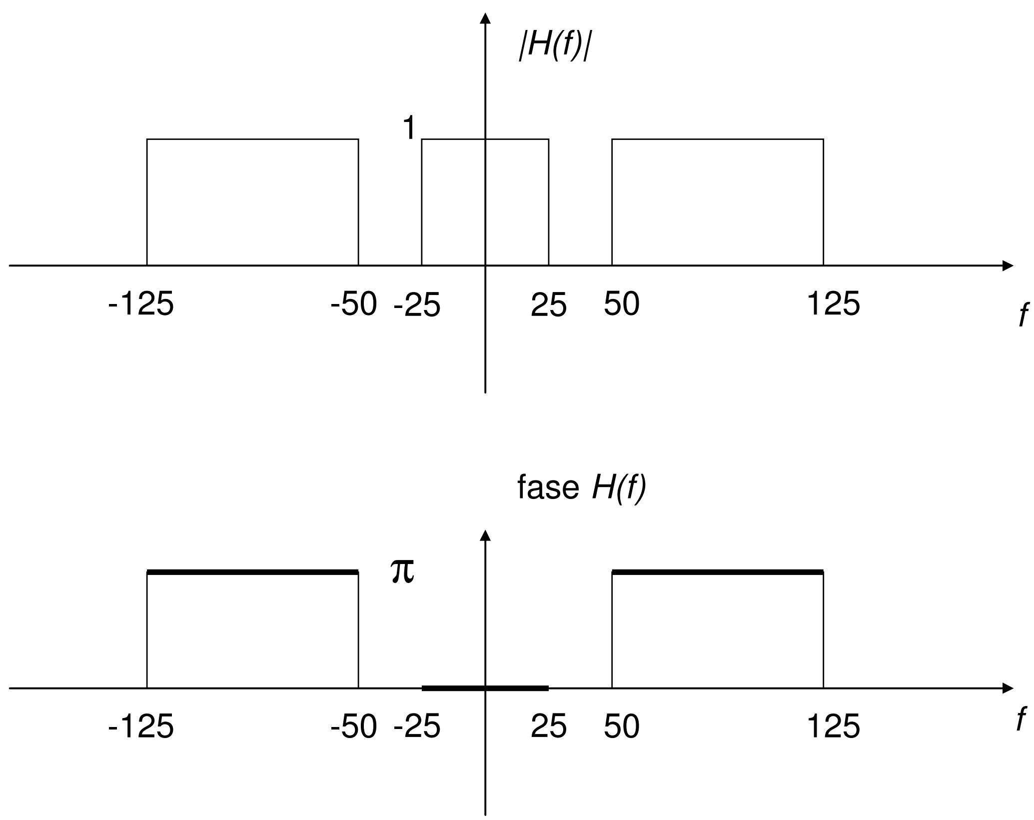

Figura 1

b - La trasformata di Fourier del segnale d'uscita e' mostrata in figura 2.

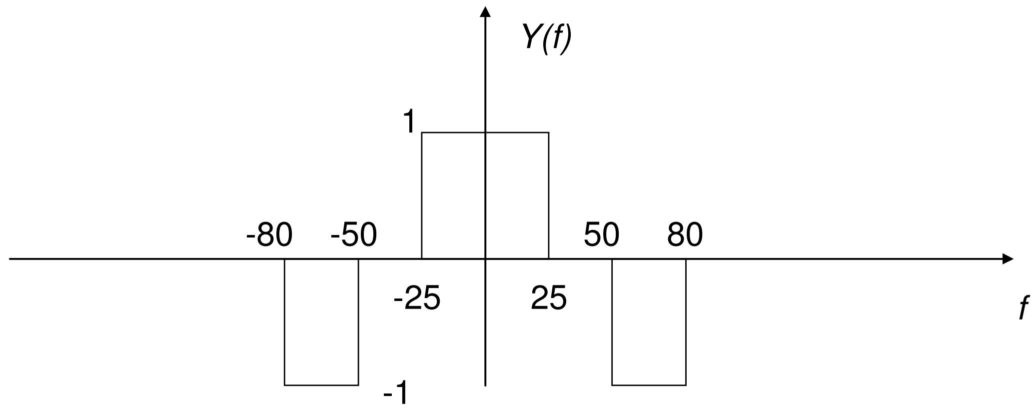

Figura 2

La sua anti-trasformata è data dal seguente segnale:

$$y(t) = \frac{\sin \pi 50t}{\pi t} - 2\frac{\sin \pi 30t}{\pi t}\cos(2\pi 65t)$$

ESERCIZIO 2

a - Il sgnale $x(t) = \frac{\sin(\pi t)}{(\pi t)}\exp\{j2\pi(t+1)\}$ è equivalente a:

$$x(t) = \frac{\sin(\pi t)}{(\pi t)}\exp\{j2\pi t\}$$

La sua trasformata di Fourier è dunque un rettangolo di ampiezza unitaria e banda compresa tra $\frac{1}{2} < f < \frac{3}{2}$. Campionando con frequenza di campionamento $f_s = 2.5$ s'introduce alias in frequenza ottenendo la seguente trasformata di Fourier:

$$X_c(f) = \frac{5}{2} \cdot \sum_k rect\left(f - 1 - k\frac{5}{2}\right)$$

b – Il segnale tempo continuo ricostruito da quello campionato si ottiene antitrasformando $X_c(f)\cdot\frac{2}{5}$ nella banda $-\frac{5}{4}<f<\frac{5}{4}$. Quindi la trasformata del segnale ricostruito è costituita da un rettangolo di ampiezza unitaria, banda $\frac{1}{4}$ centrato in $f=-\frac{9}{8}$ e da un rettangolo di ampiezza unitaria, banda $\frac{3}{4}$ centrato in $f=\frac{7}{8}$:

$$X_R(f)=rect\left(4f+\frac{36}{8}\right)+rect\left(\frac{4}{3}f-\frac{28}{24}\right)$$

Il segnale tempo-continuo ricostruito ha la seguente espressione:

$$x_R(t)=\frac{\sin\pi\frac{1}{4}t}{\pi t}\exp\left\{-j2\pi\frac{9}{8}t\right\}+\frac{\sin\pi\frac{3}{4}t}{\pi t}\exp\left\{j2\pi\frac{7}{8}t\right\}$$

ESERCIZIO 3

a – Dai dati del problema la potenza del processo dato è:

$$P_x=\int S_x(f)df=27+19=46$$

L'autocorrelazione del processo vale:

$$R_x(\tau)=\frac{\sin\pi 27\tau}{\pi\tau}+19$$

L'autocovarianza vale:

$$C_x(\tau)=\frac{\sin\pi 27\tau}{\pi\tau}$$

Il coefficiente di correlazione vale:

$$\rho_x(\tau)=\frac{C_x(\tau)}{\sigma_x^2}=\frac{\sin\pi 27\tau}{\pi 27\tau}$$

b - Conviene calcolare la densità spettrale di potenza del processo in uscita e poi integrare.

La densità spettrale di potenza può essere calcolata utilizzando la nota formula $S_y(f) = S_x(f)|H(f)|^2$.

$$S_y(f) = S_x(f)|H(f)|^2 = \left[rect\left(\frac{f}{27}\right) + 19\delta(f) \right] \cdot 81[tri(f)]^2$$

dove con $tri(f)$ si è indicata una funzione triangolare simmetrica nella banda $-1 < f < 1$ e altezza unitaria nell'origine.

Il calcolo della potenza del processo in uscita è semplice:

$$P_y = \int S_y(f)df = 81 \cdot 19 + 9 \cdot 2\int_0^1 (1-f)^2 df = 1539 + 81 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} = 1593$$