Segnali per le Telecomunicazioni - Terzo appello (Prati) - 10 Settembre 2010

La prima parte degli esercizi presenta una difficolta' minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficolta' nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficolta'.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova e' 2h e 30min.

ESERCIZIO 1

Sia dato un sistema LTI con la risposta all'impulso $h(t) = \dfrac{\sin\{\pi(t-\tau)\}}{\pi(t-\tau)} \exp\{j2\pi f_o t\}$.

a - Si tracci il grafico della risposta in frequenza del sistema dato
b - Si calcoli l'espressione della convoluzione tra $h(t)$ e $x(t) = \sin(2\pi f_o t + \varphi)$.

ESERCIZIO 2

Sia dato il segnale tempo-continuo $x(t) = 4\cos(2\pi f_o t)\cos(\pi f_o t)$
a - Si tracci il grafico della trasformata di Fourier *X(f)* del segnale *x(t)* e si trovi il massimo valore di *T* per evitare alias in frequenza.
b - Si consideri la sequenza $x_n = x(2nT)$ dove *T* è il valore calcolato al punto precedente. Si tracci il grafico della trasformata di Fourier in frequenza normalizzata $X(\phi)$ della sequenza x_n.
c – Si calcoli l'espressione della DFT di 300 campioni di x_n con $0 \le n \le 299$ (*suggerimento: si scriva l'espressione della sequenza x_n antitrasformando* $X(\phi)$).

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale discreto x_n stazionario con densita' di probabilita' delle ampiezze gaussiana con valor medio $m_x = -2$. Si sappia che i valori dell'autocovarianza valgono $C_x[m] = 5 \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)^{|m|}$ per $|m| \le 2$ e che sono nulli per $|m| > 2$.
a - Si calcoli l'epressione dell'autocorrelazione e del coefficiente di correlazione del processo casuale dato.
b – Si calcoli la densità di probabilità delle ampiezze del processo casuale $y_n = \dfrac{1}{2}x_n - \dfrac{1}{4}x_{n-1}$.

ESERCIZIO 4

Sia data la sorgente costituita da un segnale discreto con densità di probabilità delle ampiezze uniformi tra -5 e 10 che viene quantizzata uniformemente con 5 livelli di quantizzazione.

a - Si calcolino il valori dei livelli di quantizzazione in modo da minimizzare l'errore di quantizzazione
b - Si calcoli il valore dell'entropia *H* della sorgente numerica data.
c - Si trovi una ragionevole codifica binaria della sorgente data, si ricavi il numero medio di bit per simbolo necessario alla codifica e la bit-rate media sapendo che l'intevallo di campionamento del segnale discreto è di 1ms.

TELECOMUNICAZIONI Terzo appello (Prati) - 10 Settembre 2010

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a - La risposta in frequenza e' un rettangolo di ampiezza unitaria nell'intervallo $f_o - \frac{1}{2} \le f \le f_o + \frac{1}{2}$ con fase lineare con pendenza negativa nulla in f_o:

$$H(f) = rect(f - f_o)\exp\{-j2\pi(f - f_o)\tau\}$$

b – Il segnale dato può essere scritto come:

$$x(t) = \frac{j}{2}\exp(-j2\pi f_o t - j\varphi) - \frac{j}{2}\exp(j2\pi f_o t + j\varphi)$$

Nelle frequenze abbiamo:

$$Y(f) = X(f)H(f) =$$
$$= \left[\frac{j}{2}\exp(-j\varphi)\delta(f + f_o) - \frac{j}{2}\exp(j\varphi)\delta(f - f_o)\right]H(f)$$

Assumendo per semplicità che $f_o > \frac{1}{4}$, si ottiene:

$$Y(f) = -\frac{j}{2}\exp(j\varphi)\delta(f - f_o)$$

E, antitrasformando:

$$y(t) = -\frac{j}{2}\exp(j\varphi)\exp(j2\pi f_o t) = \frac{1}{2}\exp\left(j2\pi f_o t + j\varphi - j\pi/2\right)$$

ESERCIZIO 2

a - La trasformata di Fourier del segnale dato ha la seguente espressione:

$$X(f) = \delta\left(f - \frac{3}{2}f_o\right) + \delta\left(f + \frac{3}{2}f_o\right) + \delta\left(f - \frac{1}{2}f_o\right)\delta\left(f + \frac{1}{2}f_o\right)$$

La massima frequenza del segnale reale è $f_{max} = \frac{3}{2}f_o$. Il teorema del campionamento dice che occorre campionare con frequenza di campionamento almeno doppia: $f_s = 3f_o$ e quindi $T = \frac{1}{3f_o}$.

b – Campionando con $f_s = \frac{3}{2} f_o$ s'introduce alias in frequenza ottenedo la seguente trasformata dell sequenza $x_n = x(2nT)$:

$$X(f) = 3 f_o \delta(f) + \frac{3}{2} f_o \delta\left(f - \frac{1}{2} f_o\right) + \frac{3}{2} f_o \delta\left(f + \frac{1}{2} f_o\right)$$ periodica di periodo $f_s = \frac{3}{2} f_o$.

La trasformata in frequenza normalizzata $X(\phi)$ della sequenza x_n ha la seguente espressione:

$$X(\phi) = 2\delta(\phi) + \delta\left(\phi - \frac{1}{3}\right) + \delta\left(\phi + \frac{1}{3}\right)$$ periodica di periodo unitario.

c – Se si campiona $x(t)$ con intervallo di campionamento $T = \frac{2}{3 f_o}$, si ottiene la seguente sequenza:

$$x_n = 2 + 2\cos\left(2\pi \frac{1}{3} n\right)$$

L'espressione della DFT dei primi 300 campioni si calcola dalla definizione e vale:

$$X_k = 600\delta_k + 300\delta_{k-100} + 300\delta_{k-200}$$

ESERCIZIO 3

a – L'autocovarianza ha la seguente espressione:

$$C_x(m) = 5\delta_m + \frac{5}{4}\delta_{m-1} + \frac{5}{4}\delta_{m+1} + \frac{5}{16}\delta_{m-2} + \frac{5}{16}\delta_{m+2}$$

L'autorrelazione vale:

$$R_x[m] = C_x[m] + |m_x|^2 = C_x[m] + 4$$

Il coefficiente di correlazione vale:

$$\rho_x[m] = \frac{C_x[m]}{\sigma_x^2} = \frac{C_x[m]}{5} = \delta_m + \frac{1}{4}\delta_{m-1} + \frac{1}{4}\delta_{m+1} + \frac{1}{16}\delta_{m-2} + \frac{1}{16}\delta_{m+2}$$

b - Il processo casuale y_n è ancora gaussiano. Per calcolare la densità di probabilità delle ampiezze è sufficiente trovare valor medio e varianza di y_n:

$$m_y = m_x \cdot \sum_n h_n = -2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{2}$$

$$R_y[m] = R_x[m] * h_m * h^*_{-m} = R_x[m] * \left(\frac{5}{16}\delta_m - \frac{1}{8}\delta_{m-1} - \frac{1}{8}\delta_{m+1} \right)$$

Dato che interessa calcolare solo la varianza di y_n è sufficiente calcolare il valore dell'autocorrelazione di y_n solo per $m = 0$:

$$R_y[0] = \left(5 \cdot \frac{5}{16} - \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{8} - \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{8} + \left(\frac{5}{16} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \right) \cdot 4 \right) = \frac{3}{2}$$

Da cui:

$$\sigma_y^2 = C_y[0] = R_y[0] - |m_x|^2 = \frac{5}{4}$$

La densità di probabilità delle ampiezze ha la seguente espressione:

$$p_y(a) = \frac{1}{\sqrt{\pi \frac{5}{2}}} \exp\left\{ -\frac{\left(a + \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{5}{2}} \right\}$$

__ESERCIZIO 4__

a - I livelli di quantizzazione valgono ovviamente: $-3.5, -0.5, 2.5, 5.5, 8.5$

b - Il valore dell'entropia *H* della sorgente numerica data si calcola dalla definizione:

$$H = \sum_{i=1}^{5} - p_i \log_2(p_i) = \log_2(5) = 2.3219 \text{ bit/livello}$$

c - La piu' semplice codifica binaria della sorgente numerica trovata al punto precedente si ricava come codice di Huffmann di 5 simboli equiprobabili: 11, 10, 01, 001, 000.

Il numero medio di bit per simbolo è uguale a: $2 \cdot \frac{1}{5} \cdot 3 + 3 \cdot \frac{1}{5} \cdot 2 = 2.4$ bit/simbolo.

Da cui la bit rate media risulta essere $R_b = 2.4 \cdot 1000 = 2.4 Kbit/s$.