SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI (Prati)
TERZO APPELLO – 9 Settembre 2011

La prima parte degli esercizi presenta una difficolta' minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficolta' nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficolta'.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova e' 2h e 15min.

ESERCIZIO 1

Sia dato un sistema LTI con risposta all'impulso $h(t) = \frac{2\sin(\pi f_o t)}{\pi t}\sin(\pi f_o t)$.

a - Si calcoli la risposta in frequenza $H(f)$ e se ne traccino i grafici di modulo e fase.
b - Si calcoli l'uscita del sistema all'ingresso $x(t) = \cos(2\pi f_o t)\cos(\pi f_o t)$.

ESERCIZIO 2

Sia dato il segnale tempo continuo $x(t) = 1 + \left(\frac{\sin(\pi Bt)}{\pi t}\right)^2$. Il segnale dato viene campionato con frequenza di campionamento $f_s = 3B$ producendo la sequenza x_n.

a - Si traccino i grafici della trasformata di Fourier della sequenza x_n sia in frequenza, sia in frequenza normalizzata.

b – Si traccino i grafici della trasformata di Fourier della sequenza $y_n = x_{2n}$

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale discreto stazionario x_n, gaussiano con varianza 2, valor medio 2 e coefficiente di correlazione $\rho_x[m] = \delta_m - \frac{1}{4}\delta_{m-1} - \frac{1}{4}\delta_{m+1}$.

a - Si calcoli l'espressione dell'autocorrelazione del processo x_n.
b – Il processo x_n viene filtrato con un sistema Lineare Tempo Invariante con risposta all'impulso $h_n = 2\delta_n - \delta_{n-1} - \frac{1}{2}\delta_{n-2}$. Si calcoli il valor medio del processo filtrato y_n.
c – Si calcoli l'espressione della cross-correlazione tra il processo filtrato y_n e quello d'ingresso x_n.

TELECOMUNICAZIONI Terzo Apello (Prati) – 9 Settembre 2011

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a – La risposta in frequenza e' data da

$$H(f) = j \cdot rect\left(\frac{f}{f_o}\right) * \left[\delta\left(f + \frac{f_o}{2}\right) - \delta\left(f - \frac{f_o}{2}\right)\right]$$

Il modulo è una costante unitaria tra $-f_o$ e $+f_o$, mentre la fase vale $\frac{\pi}{2}$ tra $-f_o$ e 0 e $-\frac{\pi}{2}$ tra 0 e $+f_o$.

b - La trasformata di Fourier del segnale $x(t) = \cos(2\pi f_o t)\cos(\pi f_o t)$ è data da:

$$X(f) = \left\{\frac{1}{2}\delta(f - f_o) + \frac{1}{2}\delta(f + f_o)\right\} * \left\{\frac{1}{2}\delta\left(f - \frac{f_o}{2}\right) + \frac{1}{2}\delta\left(f + \frac{f_o}{2}\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\delta\left(f - \frac{f_o}{2}\right) + \frac{1}{4}\delta\left(f + \frac{f_o}{2}\right) + \frac{1}{4}\delta\left(f - \frac{3f_o}{2}\right) + \frac{1}{4}\delta\left(f + \frac{3f_o}{2}\right)$$

La tarsformata di Fourier dell'uscita e' dunque:

$$Y(f) = \frac{j}{4}\delta\left(f + \frac{f_o}{2}\right) - \frac{j}{4}\delta\left(f - \frac{f_o}{2}\right)$$

L'espressione dell'uscita è:

$$y(t) = \frac{1}{2}\sin(\pi f_o t)$$

ESERCIZIO 2

a - I grafici delle trasformate di Fourier del segnale campionato sono riportati nella seguente figura 1. Si noti che la trasformata in frequenza è stata ottenuta da quella del segnale tempo continuo moltiplicando le ampiezze per il valore della frequenza di campionamento e periodicizzando il risultato al passo della frequenza di campionamento (non c'è alias in frequenza). Per quanto riguarda la trasformata in frequenza normalizzata, l'asse delle frequenze è stato scalato per la frequenza di campionamento (tutti i valori sono stati divisi per $f_s = 3B$) così come l'area dell'impulso nell'origine (le altre ampiezze rimangono inalterate).

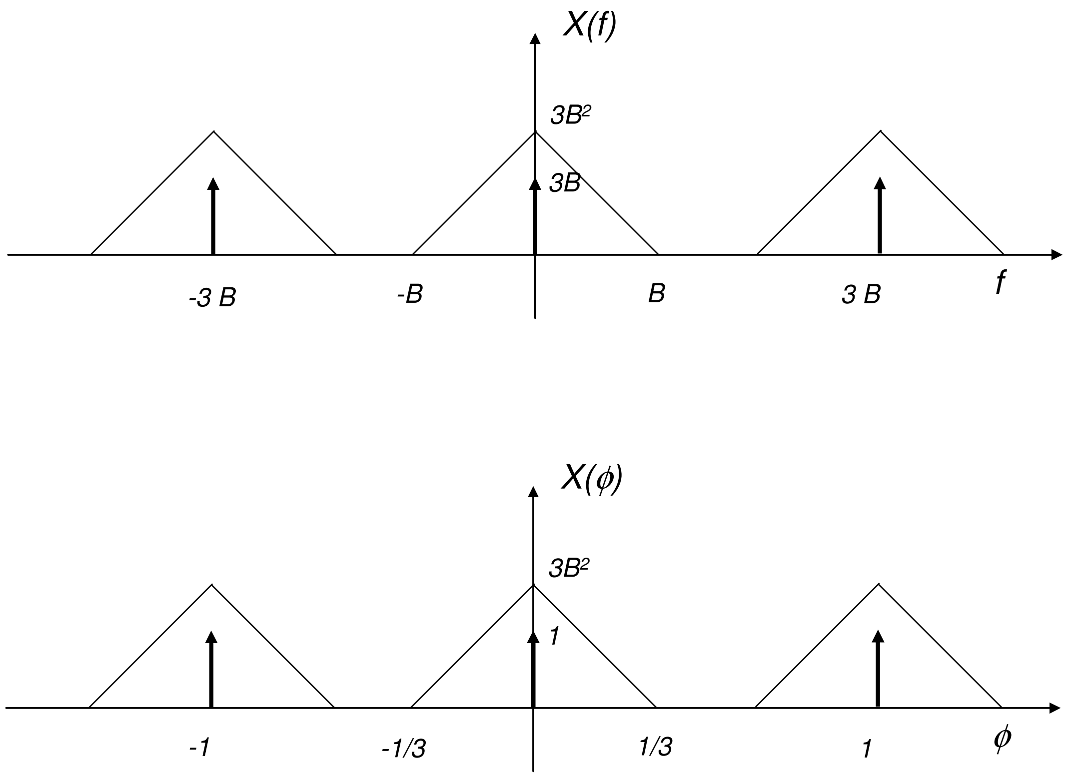

Figura 1.

b – Calcolare la trasformata di Fourier della sequenza $y_n = x_{2n}$ equivale a campionare il segnale continuo con una frequenza di campionamento metà di quella utilizzata al punto precedente. La nuova frequenza di campionamento è dunque: $f_s = \frac{3}{2}B$. In questo caso s'introduce alias in frequenza e il risultato è riportato nella seguente figura 2.

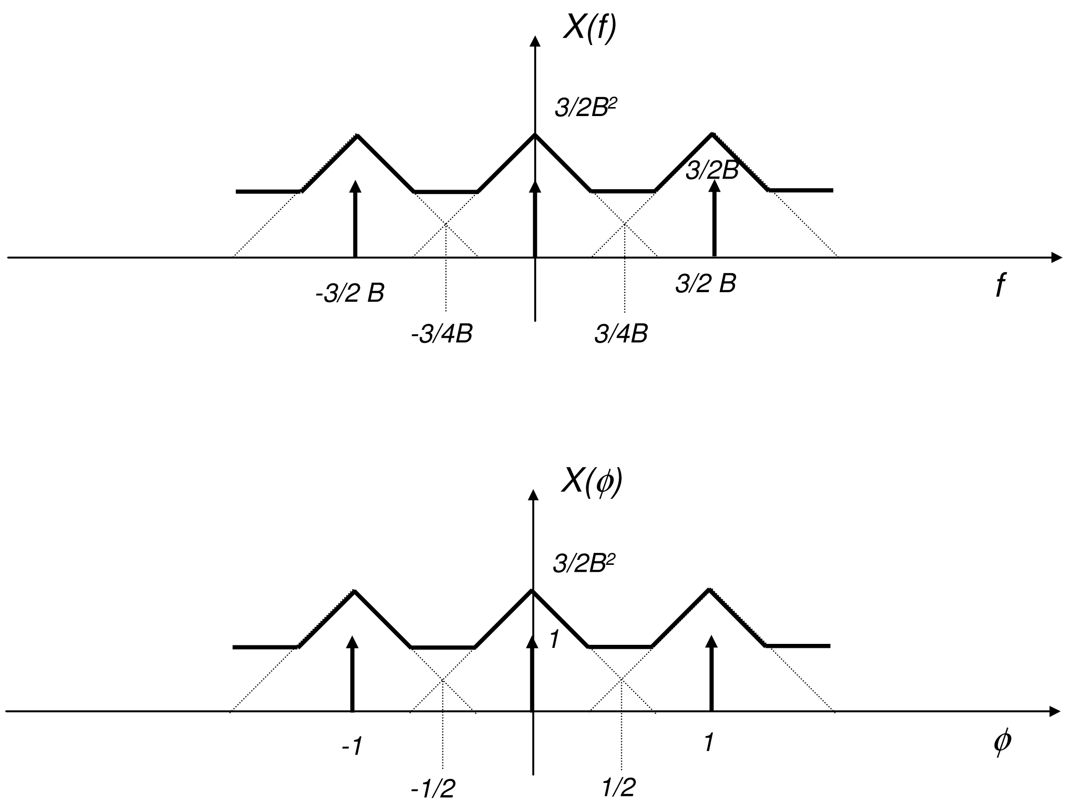

Figura 2 . La TF è mostrata con la linea in grassetto. Le linee tratteggiate mostrano il processo di periodicizzazione della trasformata del segnale tempo continuo. Il risultato in grassetto è dato dalla somma di tutte le repliche ottenute dalla periodicizzazione.

ESERCIZIO 3

a – Dai dati del problema:

$$C_x[m] = \sigma_x^2 \rho_x[m] = 2\left[\delta_m - \frac{1}{4}\delta_{m-1} - \frac{1}{4}\delta_{m+1}\right]$$

$$R_x[m] = C_x[m] + |m_x|^2 = 2\delta_m - \frac{1}{2}\delta_{m-1} - \frac{1}{2}\delta_{m+1} + 4$$

b - Il valor medio del processo filtrato vale:

$$m_y = m_x \cdot \sum h_n = 2 \cdot (2 - 1 - 1/2) = 1$$

La cross-correlazione tra il processo filtrato y_n e quello d'ingresso x_n si è il risultato della seguente convoluzione:

$$R_{yx}[m] = R_x[m] * h_m = \left\{2\delta_m - \frac{1}{2}\delta_{m-1} - \frac{1}{2}\delta_{m+1} + 4\right\} * \left(2\delta_n - \delta_{n-1} - \frac{1}{2}\delta_{n-2}\right) =$$

$$= -\delta_{m+1} + \frac{9}{2}\delta_m - \frac{11}{4}\delta_{m-1} - \frac{1}{2}\delta_{m-2} + \frac{1}{4}\delta_{m-3} + 2$$