TELECOMUNICAZIONI terzo appello - 4 Settembre 2013

La prima parte degli esercizi presenta una difficolta' minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficolta' nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficolta'.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova e' 2h e 15min.
I punteggi indicano il peso relativo dell'esercizio.

ESERCIZIO 1

Sia dato il segnale $x(t)=\dfrac{\sin \pi B(t+\tau)}{\pi(t+\tau)}$.

a [6/30]- Si traccino i grafici di modulo e fase della trasformata di Fourier del segnale dato.

b [5/30]- Si tracci il modulo della trasformata di Fourier del segnale $y(t)=x(t)\cos\left(\dfrac{\pi B}{2}t\right)$ ponendo $B=\dfrac{1}{\tau}$.

ESERCIZIO 2

Si consideri il segnale $x(t)=\cos(2\pi f_o t+\theta)+2\cos\left(2\pi \dfrac{f_o}{8}t\right)$ che viene campionato con frequenza di campionamento $f_s=\dfrac{f_o}{2}$.

a [6/30]- Si trovi l'espressione della trasformata di Fourier del segnale campionato sia in frequenza sia in frequenza normalizzata.
b [5/30]**-** Si trovi l'espressione della trasformata discreta di Fourier dei primi 100 campioni $0 \le n \le 99$ del segnale campionato.

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale stazionario discreto x_n la cui densità di probabilità delle ampiezze uniforme, valor medio $m_x=1$, potenza $P_x=17$ e coefficiente di correlazione $\rho_x[m]=\delta_m+\dfrac{1}{2}\delta_{m-1}+\dfrac{1}{2}\delta_{m+1}$.

a [6/30]- Calcolare la potenza del processo casuale $y_n=x_n+\dfrac{1}{2}x_{n-1}+\dfrac{1}{4}x_{n-2}$.

b [3/30]– Calcolare il coefficiente di correlazione del processo casuale y_n .

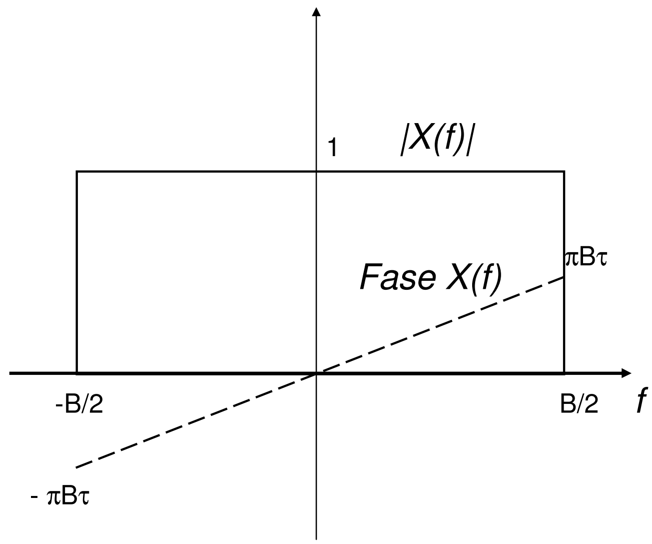
c [2/30]– Se il coefficiente di correlazione di x_n diminuisse più lentamente con *m* rispetto a quello dato nel testo, la potenza di y_n rimarrebbe uguale, aumenterebbe o diminuirebbe. Perchè?.

TELECOMUNICAZIONI terzo appello – 4 Settembre 2013

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a – Modulo e fase della trasformata di Fourier del segnale dato sono mostrate nella seguente figura:



b) $Y(f) = \frac{1}{2}X\left(f-\frac{B}{4}\right) + \frac{1}{2}X\left(f+\frac{B}{4}\right)$

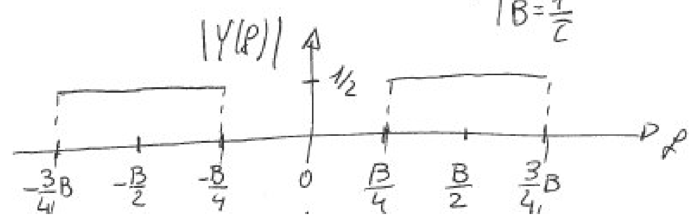
$-\frac{3}{4}B \le f \le -\frac{B}{4}$ $\quad |X(f)| = \frac{1}{2}$ $\quad \measuredangle X(f) = 2\pi\left(f+\frac{B}{4}\right)\tau$

$\frac{B}{4} \le f \le \frac{3}{4}B$ $\quad |X(f)| = \frac{1}{2}$ $\quad \measuredangle X(f) = 2\pi\left(f-\frac{B}{4}\right)\tau$

$-\frac{B}{4} < f < \frac{B}{4}$ $\quad X(f) = \frac{1}{2}e^{j2\pi\left(f+\frac{B}{4}\right)\tau} + \frac{1}{2}e^{j2\pi\left(f-\frac{B}{4}\right)\tau} =$

$$= \frac{1}{2}e^{j2\pi f\tau}\left(e^{j2\pi\frac{B}{4}\tau} + e^{-j2\pi\frac{B}{4}\tau}\right) =$$

$$= e^{j2\pi f\tau}\cdot\cos\left(2\pi\frac{B}{4}\tau\right)\Big|_{B=\frac{1}{\tau}} = 0$$



ESERCIZIO 2

La trasformata $X(f)$ ha la seguente espressione:

$$X(f) = \frac{1}{2}e^{j\theta}\delta(f - f_o) + \frac{1}{2}e^{-j\theta}\delta(f + f_o) + \delta\left(f - \frac{f_o}{8}\right) + \delta\left(f - \frac{f_o}{8}\right)$$

Campionando $x(t)$ con $f_s = \frac{f_o}{2}$ la trasformata $X(f)$ viene moltiplicata per $\frac{f_o}{2}$ e periodicizzata a passo $\frac{f_o}{2}$. Troviamo:

$$\tilde{X}(f) = \frac{f_o}{2}\cos(\theta)\delta(f) + \frac{f_o}{2}\delta\left(f - \frac{f_o}{8}\right) + \frac{f_o}{2}\delta\left(f - \frac{f_o}{8}\right) \quad \text{periodica } \frac{f_o}{2}$$

Passando alla frequenza normalizzata:

$$\tilde{X}(\phi) = \cos(\theta)\delta(\phi) + \delta\left(\phi - \frac{1}{4}\right) + \delta\left(\phi + \frac{1}{4}\right) \text{ periodica 1.}$$

b – Il risultato ottenuto al punto precedente mostra che a valle del campionamento si e' ottenuta una coinusoide di frequenza normalizzata ¼ cioe' di periodo 4 più una costante. In 100 campioni ci sono esattamente 25 cicli della cosinusoide. Quindi:

$$X_k = 100\cos(\theta)\delta_k + 100\delta_{k-25} + 100\delta_{k-75}$$

ESERCIZIO 3

a – Dai dati del problema $\sigma_x^2 = P_x - m_x^2 = 16$

$$R_x[m] = \sigma_x^2\rho_x[m] + |m_x|^2 = 16\delta_m + 8\delta_{m-1} + 8\delta_{m+1} + 1$$

$$R_y[m] = R_x[m] * h_m * h_{-m} = (16\delta_m + 8\delta_{m-1} + 8\delta_{m+1} + 1) * \left(\frac{21}{16}\delta_m + \frac{10}{16}\delta_{m\pm1} + \frac{4}{16}\delta_{m\pm2}\right) =$$

$$= 31\delta_m + \frac{45}{2}\delta_{m\pm1} + 9\delta_{m\pm2} + 2\delta_{m\pm3} + \frac{49}{16}$$

La potenza del processo filtrato vale $P_y = 31 + \frac{49}{16} = \frac{545}{16} \approx 34$

b - Il coefficiente di correlazione dell'uscita vale:

$$R_y[m] = R_x[m] * h_m * h_{-m} = (16\delta_m + 8\delta_{m-1} + 8\delta_{m+1} + 1) * \left(\frac{21}{16}\delta_m + \frac{10}{16}\delta_{m\pm1} + \frac{4}{16}\delta_{m\pm2} \right) =$$

$$= 31\delta_m + \frac{45}{2}\delta_{m\pm1} + 9\delta_{m\pm2} + 2\delta_{m\pm3} + \frac{49}{16}$$

c - Si nota che i coefficienti della risposta all'impulso del filtro sono tutti positivi, quindi più i campioni di x_n sono tra loro correlati, più la potenza della somma (quadrato della somma) tende ad aumentare se il coefficiente di correlazione è positivo.

In altri termini:

$P_y = R_y[0] = E[y_n^2] = E\left[\left(x_n + \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{4}x_{n-2} \right)^2\right] = E[x_n^2] + \frac{1}{4}E[x_{n-1}^2] + \frac{1}{16}E[x_{n-2}^2] +$ prodotti incrociati del tipo: $E[x_n x_{n-k}] = R_x[-k] = C_x[-k] + m_x^2 = \sigma_x^2 \rho_x[-k] + m_x^2$

Se il coefficiente di correlazione rimane prossimo a 1, $E[x_n x_{n-k}]$ è massimo e così pure la potenza di y_n.