SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI appello del 4 Settembre 2014

La prima parte degli esercizi presenta una difficolta' minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficolta' nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficolta'.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova è 2h.
I punteggi indicano il peso relativo dell'esercizio.

ESERCIZIO 1

Si consideri il segnale $x(t)=\dfrac{\sin\left(\pi \frac{t}{T_o}\right)}{\pi t}\cos\left(\pi \frac{t}{T_o}\right)$. Una replica del segnale $x(t)$ viene ritardata di τ secondi e sommata al segnale originale $x(t)$ formando così il segnale $y(t)$.

a [4]- Si calcoli l'espressione della trasformata di Fourier $Y(f)$.

b [3]- Si calcoli il seguente integrale di convoluzione $z(t) = y(t) * \left[\cos\left(\pi \frac{t}{T_o}\right) + \frac{1}{3} e^{j\left(4\pi \frac{t}{T_o}+\varphi\right)}\right]$.

c [3]- Si calcoli il valore di τ in corrispondenza del quale la potenza del segnale $z(t)$ è minima.

ESERCIZIO 2

Si consideri il segnale tempo-continuo $x(t)$ la cui trasformata di Fourier ha le seguenti espressioni di modulo e fase:

$$|X(f)| = rect\left(f+\frac{1}{2}\right) * rect(f-1)$$

$$\angle X(f) = \frac{\pi}{2}$$

Il segnale $x(t)$ viene campionato a passo $T=1$ ottenendo il segnale discreto x_n .

a [6]- Si tracci il grafico della Trasformata di Fourier del segnale x_n

b [4]- Si calcoli l'espressione X_k della DFT di 100 campioni di x_n

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale gaussiano stazionario x_n con valor medio unitario e potenza uguale a 3. Il coefficiente di correlazione dei campioni di x_n tra loro adiacenti è 0.5. I campioni di x_n non adiacenti tra loro sono indipendenti.

a [5]- Si scriva l'espressione della densità spettrale di potenza del processo casuale x_n .

b [5]– Si scriva l'espressione della densità di probabilità delle ampiezze de processo casuale y_n ottenuto sottraendo ad ogni campione di x_n il doppio del campione precedente.

SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI appello del 4 Settembre 2014

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a) La trasformata di Fourier del generico segnale $y(t) = x(t) + x(t-\tau)$ ha la seguente espressione:

$$Y(f) = X(f) \cdot [1 + \exp\{-j2\pi f\tau\}]$$

Nel caso specifico in cui $x(t) = \dfrac{\sin\left(\pi \frac{t}{T_o}\right)}{\pi t} \cos\left(\pi \frac{t}{T_o}\right)$, abbiamo:

$$X(f) = \frac{1}{2} rect\left(\frac{fT_o}{2}\right)$$
$$Y(f) = \frac{1}{2} rect\left(\frac{fT_o}{2}\right) \cdot \left[1 + \exp\{-j2\pi f\tau\}\right]$$

b) La trasformata $Y(f)$ ha banda limitata tra $\pm\dfrac{1}{T_o}$. Solo il coseno ha frequenza che ricade all'interno della banda di $Y(f)$ e dunque l'esponenziale complesso (di frequenza $\dfrac{2}{T_o}$) viene eliminato.

Il risultato della moltiplicazione in frequenza è dunque:

$$Z(f) = \frac{1}{2} rect\left(\frac{fT_o}{2}\right) \cdot [1 + \exp\{-j2\pi f\tau\}] \cdot \frac{1}{2}\left(\delta\left(f - \frac{1}{2T_o}\right) + \delta\left(f + \frac{1}{2T_o}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{4}\left[1 + \exp\left\{-j\pi \frac{1}{T_o}\tau\right\}\right]\delta\left(f - \frac{1}{2T_o}\right) + \frac{1}{4}\left[1 + \exp\left\{j\pi \frac{1}{T_o}\tau\right\}\right]\delta\left(f + \frac{1}{2T_o}\right)$$

Anti-trasformando nel dominio del tempo si ottiene:

$$
\begin{aligned}
z(t) &= \frac{1}{4}\left[1+\exp\left\{-j\pi\frac{1}{T_o}\tau\right\}\right]\exp\left\{j\pi\frac{1}{T_o}t\right\}+\frac{1}{4}\left[1+\exp\left\{j\pi\frac{1}{T_o}\tau\right\}\right]\exp\left\{-j\pi\frac{1}{T_o}t\right\}= \\
&=\frac{1}{4}\left[\exp\left\{j\pi\frac{1}{T_o}t\right\}+\exp\left\{j\pi\frac{1}{T_o}(t-\tau)\right\}\right]+\frac{1}{4}\left[\exp\left\{-j\pi\frac{1}{T_o}t\right\}+\exp\left\{-j\pi\frac{1}{T_o}(t-\tau)\right\}\right]= \\
&=\frac{1}{2}\cos\left(\pi\frac{1}{T_o}t\right)+\frac{1}{2}\cos\left(\pi\frac{1}{T_o}(t-\tau)\right)
\end{aligned}
$$

c) La potenza di $z(t)$ è minima quando $\tau = T_o$ infatti

$$\frac{1}{2}\cos\left(\pi\frac{1}{T_o}(t-T_o)\right)=\frac{1}{2}\cos\left(\pi\frac{1}{T_o}t-\pi\right)=-\frac{1}{2}\cos\left(\pi\frac{1}{T_o}t\right)$$ e dunque $z(t)=0$.

ESERCIZIO 2

a – La trasformata $X(f)$ è triangolare tra $f=-\frac{1}{2}$ e $f=\frac{3}{2}$ con fase costante pari a $\frac{\pi}{2}$. Campionando nel tempo a passo 1 si ottiene una replicazione periodica in frequenza a passo 1. Il risultato è una costante di modulo unitario e fase costante pari a $\frac{\pi}{2}$.

$$X(\phi)=e^{j\frac{\pi}{2}}=j$$

b – La trasformata discreta di Fourier si ottiene campionando la trasformata $X(\phi)$ a passo 1/100.

Si ottiene ancora una costante: l'espressione X_k della DFT di 100 campioni è $X_k = j$

ESERCIZIO 3

a – Dai dati del problema si sa che il coefficiente di correlazione del processo casuale è:

$$\rho_x[m] = \delta_m + \frac{1}{2}\delta_{m+1} + \frac{1}{2}\delta_{m-1}$$

Inoltre:

$$m_x = 1 \quad P = E\left[|x|^2\right] = 3 \quad \sigma_x^2 = E\left[|x|^2\right] - |m_x|^2 = 2$$

Quindi:

$$R_x[m] = C_x[m] + m_x^2 = \sigma_x^2 \rho_x[m] + m_x^2 = 2\delta_m + \delta_{m+1} + \delta_{m-1} + 1$$

$S_x(\phi) = 2\left(1 + \cos(2\pi\phi)\right) + \delta(\phi)$ periodica di periodo 1

b – Il processo x_n è gaussiano quindi lo sarà anche y_n. E' dunque sufficiente calcolare valor medio e varianza di y_n. Il processo x_n viene convoluto con la seguente risposta all'impulso: $h_n = \delta_n - 2\delta_{n-1}$

$$m_y = m_x \cdot (-1) = -1$$

$$\sigma_y^2 = R_y[0] - |m_y|^2$$

$$R_y[m] = R_x[m] * h_m * h_{-m} = (2\delta_m + \delta_{m+1} + \delta_{m-1} + 1) * (-2\delta_{m+1} + 5\delta_m - 2\delta_{m-1})$$

$$R_y[0] = (2\delta_m + \delta_{m+1} + \delta_{m-1} + 1) * (-2\delta_{m+1} + 5\delta_m - 2\delta_{m-1}) = -2 + 10 - 2 + 1 = 7$$

$$\sigma_y^2 = R_y[0] - |m_y|^2 = 7 - 1 = 6$$

$$p_y(a) = G(-1, 6)$$