Segnali per le comunicazioni –Appello del 22/7/2024

Gli esercizi devono essere svolti nel tempo massimo di 2h

Esercizio 1

Sia dato il sistema LTI con risposta all'impulso $h(t) = \frac{\sin(4\pi B(t-\tau))}{\pi(t-\tau)} \sin(2\pi Bt)$

A) Si calcoli l'espressione analitica della risposta in frequenza $H(f)$

B) Si traccino i grafici di modulo e fase della trasformata di Fourier di $y(t) = h(t) * \frac{\sin(2\pi Bt)}{\pi t}$ *(suggerimento: semplificate per quanto possibile l'espressione analitica di $Y(f)$ raccogliendone i termini comuni…)*

Esercizio 2

Si campioni il segnale tempo continuo $x(t) = 1 + \frac{\sin(12\pi t)}{\pi t} \cos(24\pi t + \alpha)$ con frequenza di campionamento $f_s = 12$ ottenendo il segnale x_n.

A) Si traccino i grafici della trasformata di Fourier del segnale x_n sia in frequenza sia in frequenza normalizzata.

B) Si trovi l'espressione del segnale $x_R(t)$ tempo continuo ricostruito dai campioni di x_n.

C) Campionare con frequenza di campionamento $f_s = 100$ il segnale originale $x(t)$ e quello ricostruito $x_R(t)$ produce sequenze uguali o diverse? Perché?

Esercizio 3

Sia dato il processo casuale discreto, stazionario x_n. La densità di probabilità del processo $p_x(a)$ è nulla in $a = 0$ e i campioni del processo possono assumere con continuità tutti i valori compresi tra 0 e 1 con probabilità che cresce linearmente. Il coefficiente di correlazione del processo è

$$\rho_x[m] = \frac{\sin\left(\pi \frac{m}{5}\right)}{\pi \frac{m}{5}}$$

A) Si scriva l'espressione della funzione di autocorrelazione del processo x_n. *(suggerimento: disegnate la densità di probabilità $p_x(a)$ per calcolare i parametri che vi servono …)*

B) Il processo x_n viene filtrato con la risposta all'impulso $h_n = A \frac{\sin\left(\pi \frac{n-1}{10}\right)}{\pi(n-1)}$ producendo in uscita il processo y_n. Sapendo che la potenza di y_n è $P_y = 17$, si trovi il valore A della risposta all'impulso h_n.

Soluzione Esercizio 1 del 22/7/2024

A) La trasformata di Fourier di $h(t) = \frac{\sin(4\pi B(t-\tau))}{\pi(t-\tau)} \sin(2\pi Bt)$ ha la seguente espressione:

$$H(f) = -\frac{j}{2} e^{-j2\pi(f-B)\tau} rect\left(\frac{f-B}{4B}\right) + \frac{j}{2} e^{-j2\pi(f+B)\tau} rect\left(\frac{f+B}{4B}\right)$$

Cioè:

$$H(f) = \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{-j2\pi(f-B)\tau} rect\left(\frac{f-B}{4B}\right) + \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{2}} e^{-j2\pi(f-B)\tau} rect\left(\frac{f+B}{4B}\right)$$

Oppure:

$$H(f) = \frac{1}{2} e^{-j\left\{2\pi(f-B)\tau + \frac{\pi}{2}\right\}} rect\left(\frac{f-B}{4B}\right) + \frac{1}{2} e^{-j\left\{2\pi(f+B)\tau - \frac{\pi}{2}\right\}} rect\left(\frac{f+B}{4B}\right)$$

B) La trasformata di Fourier di $y(t) = h(t) * \frac{\sin(2\pi Bt)}{\pi t}$ è

$$Y(f) = X(f)H(f) = H(f) \cdot rect\left(\frac{f}{2B}\right)$$

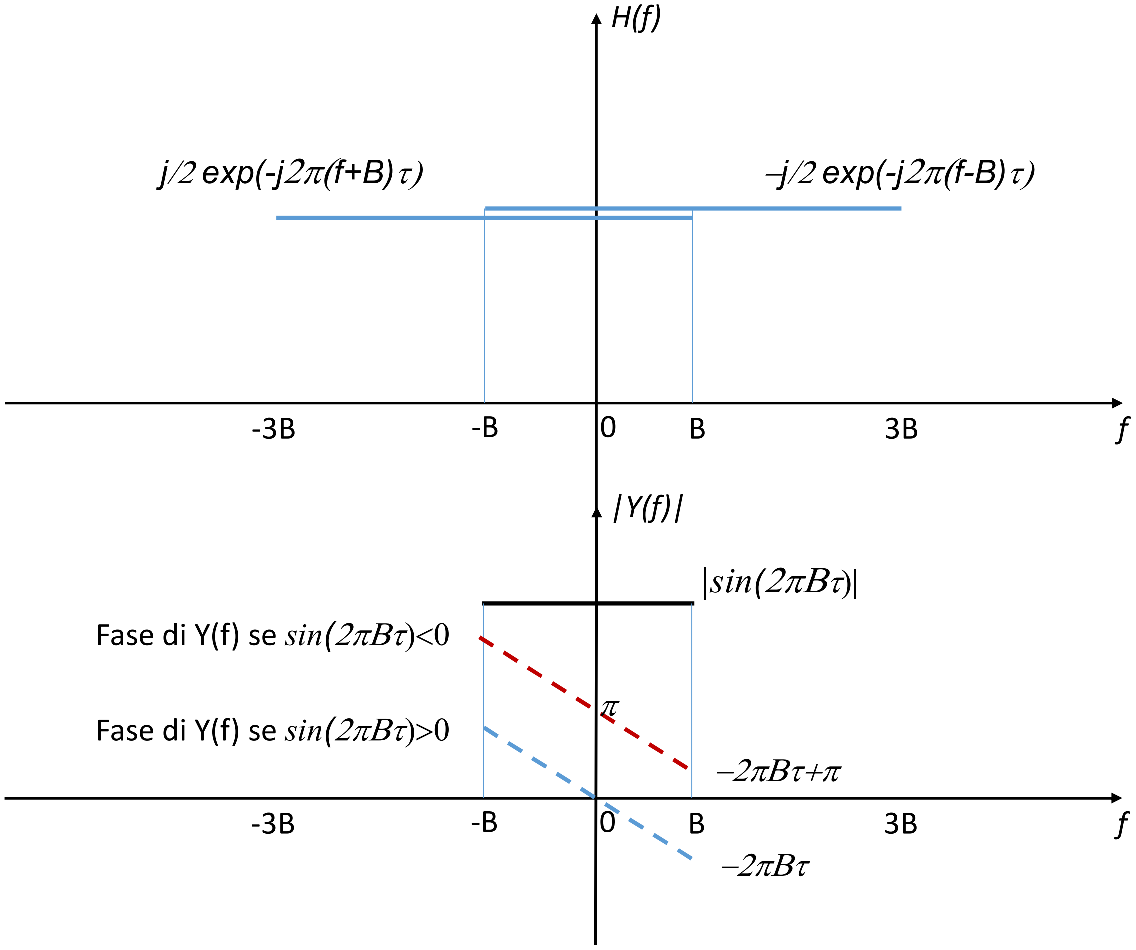
Dunque uguale a $H(f)$ nella banda $-B < f < B$.

$$Y(f) = \frac{1}{2} e^{-j\left\{2\pi(f-B)\tau + \frac{\pi}{2}\right\}} + \frac{1}{2} e^{-j\left\{2\pi(f+B)\tau - \frac{\pi}{2}\right\}}$$

Raccogliendo il termine $e^{-j\{2\pi f\tau\}}$, si ottiene la seguente espressione:

$$Y(f) = \frac{1}{2} e^{-j\{2\pi f\tau\}} \left[e^{j\left\{2\pi B\tau - \frac{\pi}{2}\right\}} + e^{-j\left\{2\pi B\tau - \frac{\pi}{2}\right\}}\right] = e^{-j\{2\pi f\tau\}} \cos\left(2\pi B\tau - \frac{\pi}{2}\right) = e^{-j\{2\pi f\tau\}} \sin(2\pi B\tau)$$

I grafici di modulo e fase di $Y(f)$ insieme a quello di $H(f)$ sono riportati nella seguente figura. Si noti che la fase cambia a seconda che il valore di $\sin(2\pi B\tau)$ sia positivo o negativo.



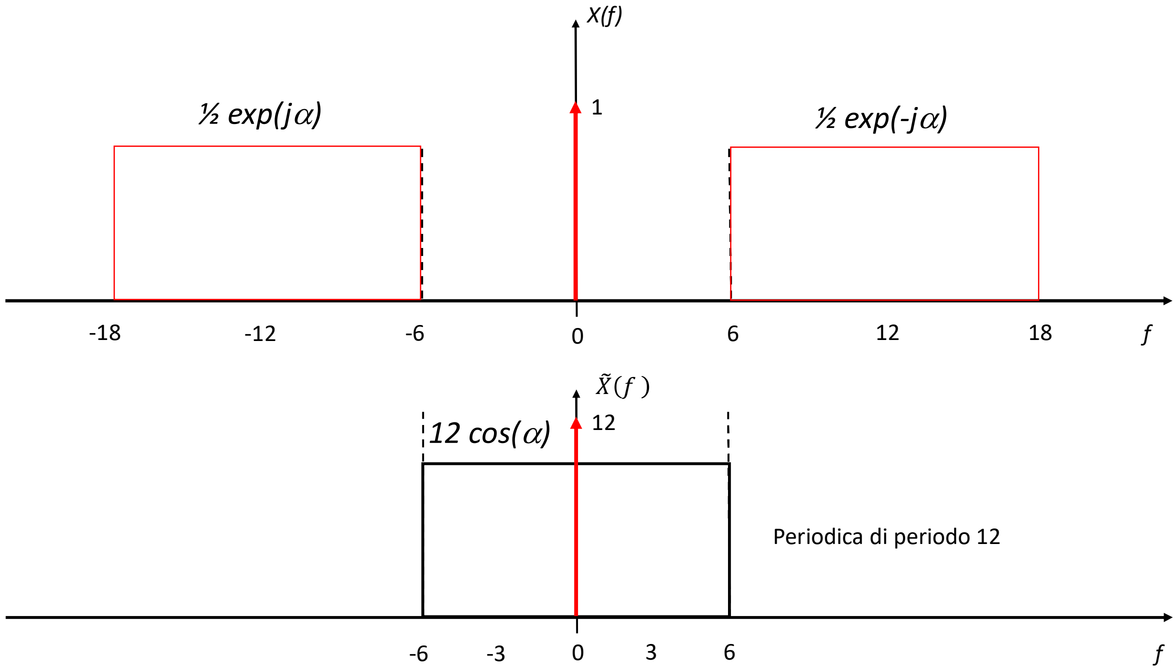
H(f)
j/2 exp(-j2π(f+B)τ)
–j/2 exp(-j2π(f-B)τ)
-3B
-B
0
B
3B
f
|Y(f)|
|sin(2πBτ)|
Fase di Y(f) se sin(2πBτ)<0
Fase di Y(f) se sin(2πBτ)>0
π
–2πBτ+π
-3B
-B
0
B
3B
f
–2πBτ

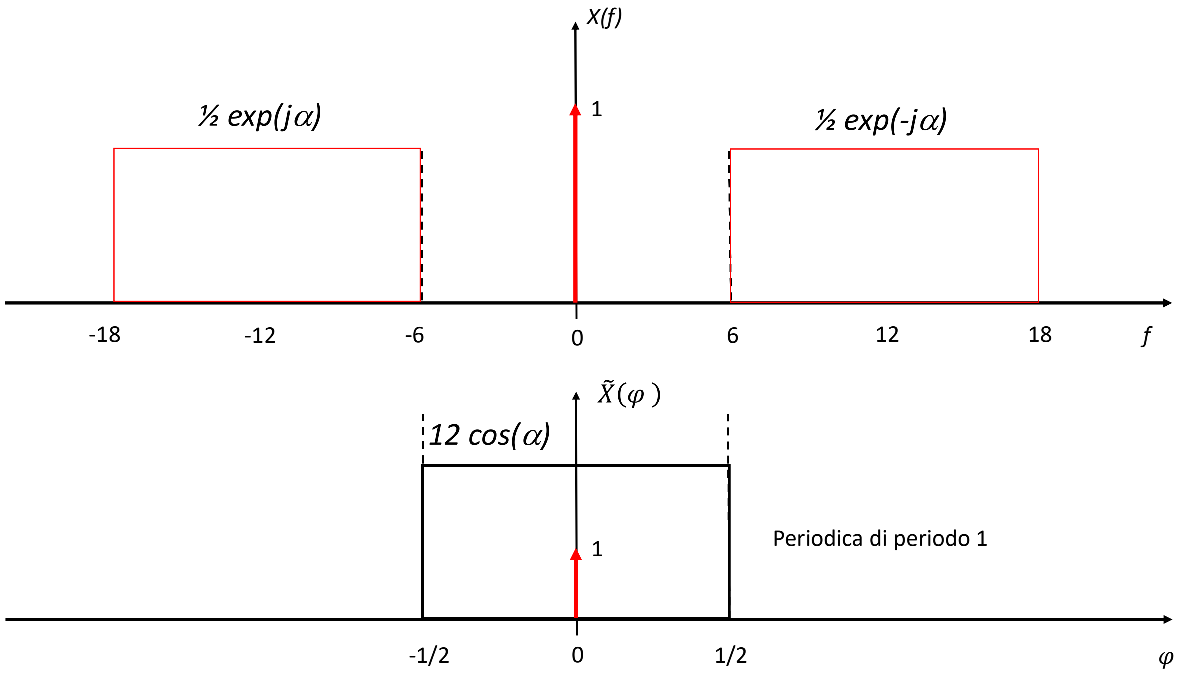
Soluzione Esercizio 2 del del 22/7/2024

A) La trasformata di $x(t) = 1 + \frac{\sin(12\pi t)}{\pi t}\cos(24\pi t + \alpha)$ è:

$$X(f) = \delta(f) + \frac{1}{2}e^{j\alpha}rect\left(\frac{f-12}{12}\right) + \frac{1}{2}e^{-j\alpha}rect\left(\frac{f+12}{12}\right)$$

Con la frequenza di campionamento $f_s = 12$ si introduce alias. Le trasformate $\tilde{X}(f)$ e $\tilde{X}(\varphi)$ (periodiche di periodo 12 e 1 rispettivamente) sono riportate nelle seguenti figure.





B) L'espressione della trasformata di Fourier del segnale ricostruito è:

$$X_R(f) = \delta(f) + \cos(\alpha)\, rect\left(\frac{f}{12}\right)$$

Il segnale ricostruito è quindi:

$$x_R(t) = 1 + \cos(\alpha)\frac{\sin(12\pi t)}{\pi t}$$

C) Le sequenze ottenute campionando a passo T=1/100 il segnale originale $x(t)$ e quello ricostruito $x_R(t)$ sono ovviamente diverse.

Infatti l'alias introdotto con il primo campionamento non è più recuperabile campionando il segnale ricostruito con un'alta frequenza di campionamento.

Soluzione Esercizio 3 del del 22/7/2024

A) Dai dati del problema la densità di probabilità del processo dato è triangolare da (0,0) a (0,2):

$$p_x(a) = 2a \cdot rect\left(a - \frac{1}{2}\right)$$

Da cui

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} a\, p_x(a) da = \int_0^1 2a^2\, da = \frac{2}{3}$$

$$E[x_n^2] = \int_{-\infty}^{\infty} a^2\, p_x(a) da = \int_0^1 2a^3\, da = \frac{1}{2}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$$

La funzione di autocorrelazione del processo è:

$$R_x[m] = \sigma_x^2 \rho_x[m] + m_x^2 = \frac{1}{18} \frac{\sin\left(\pi \frac{m}{5}\right)}{\pi \frac{m}{5}} + \frac{4}{9}$$

B) La potenza dell'uscita è data dall'integrale della sua densità spettrale di potenza. La densità spettrale di potenza dell'uscita è data:

$$\tilde{S}_y(\varphi) = \tilde{S}_x(\varphi) |H(\varphi)|^2$$

$\tilde{S}_x(\varphi) = \frac{5}{18} rect(5f) + \frac{4}{9} \delta(f)$ periodica di periodo 1

$|H(\varphi)|^2 = \left|A \cdot rect(10\varphi) e^{-j2\pi\varphi}\right|^2 = A^2 rect(10\varphi)$ periodica di periodo 1

Per cui:

$\tilde{S}_y(\varphi) = A^2 \left[\frac{5}{18} rect(10\varphi) + \frac{4}{9} \delta(\varphi)\right]$ periodica di periodo 1

La potenza dell'uscita vale: $P_y = A^2 \left[\frac{1}{36} + \frac{4}{9}\right] = A^2 \frac{17}{36} = 17$

$$A = \pm 6$$