Segnali per le comunicazioni –Appello del 22/7/2023

Gli esercizi devono essere svolti nel tempo massimo di 2h

Esercizio 1

Sia dato il segnale $x(t) = \frac{\sin(2\pi B(t-\tau))}{\pi(t-\tau)} \cos(\pi B(t+\tau))$

A) Si traccino i grafici di modulo e fase di $X(f)$ quando $\tau = \frac{1}{2B}$

B) Si trovi l'espressione della seguente convoluzione: $y(t) = x(t) * \cos^2(\pi B t)$.

Esercizio 2

Si campioni il segnale tempo continuo la cui trasformata di Fourier è $X(f) = \left[\frac{\sin(\pi f)}{\pi f}\right]^2 \left(1 - e^{j2\pi f}\right)$ con frequenza di campionamento $f_s = 1$.

A) Si trovi l'espressione del segnale $x_R(t)$ tempo continuo ricostruito dai campioni di x_n.

B) Si trovi l'espressione della DFT di x_n calcolata su N=32 campioni.

Esercizio 3

Sia dato il processo casuale $x(t)$ stazionario con densità di probabilità delle ampiezze gaussiana e autocorrelazione $R_x(\tau) = \frac{\sin(\pi\tau)}{\pi\tau} + 4$.

A) Si calcolino valor medio e varianza di

$$y(t) = x(t) * \left(\frac{1}{2}\delta(t) - \frac{1}{4}\delta(t-3) - \frac{1}{4}\delta(t+2)\right)$$

B) Si calcoli la densità spettrale di potenza di $y(t)$

C) Si consideri il processo $z(t) = y(t) + \cos(10\pi t)$. Il processo $z(t)$ è stazionario? Si calcolino la varianza e il valore quadratico medio di $z(t)$.

Soluzione Esercizio 1 del 22/7/2023

A) $$X(f) = \frac{1}{2} e^{i2\pi\frac{B}{2}\tau} rect\left(\frac{f}{2B} - \frac{1}{4}\right) e^{-i2\pi\left(f-\frac{B}{2}\right)\tau} + \frac{1}{2} e^{-i2\pi\frac{B}{2}\tau} rect\left(\frac{f}{2B} + \frac{1}{4}\right) e^{-i2\pi\left(f+\frac{B}{2}\right)\tau}$$

Nelle bande $-\frac{3}{2}B < f < -\frac{1}{2}B$ e $\frac{1}{2}B < f < \frac{3}{2}B$, non ci sono sovrapposizioni in frequenza e le trasformate sono rispettivamente:

$X(f) = \frac{1}{2} rect\left(\frac{f}{2B} + \frac{1}{4}\right) e^{-i2\pi(f+B)\tau}$ e $X(f) = \frac{1}{2} rect\left(\frac{f}{2B} - \frac{1}{4}\right) e^{-i2\pi(f-B)\tau}$

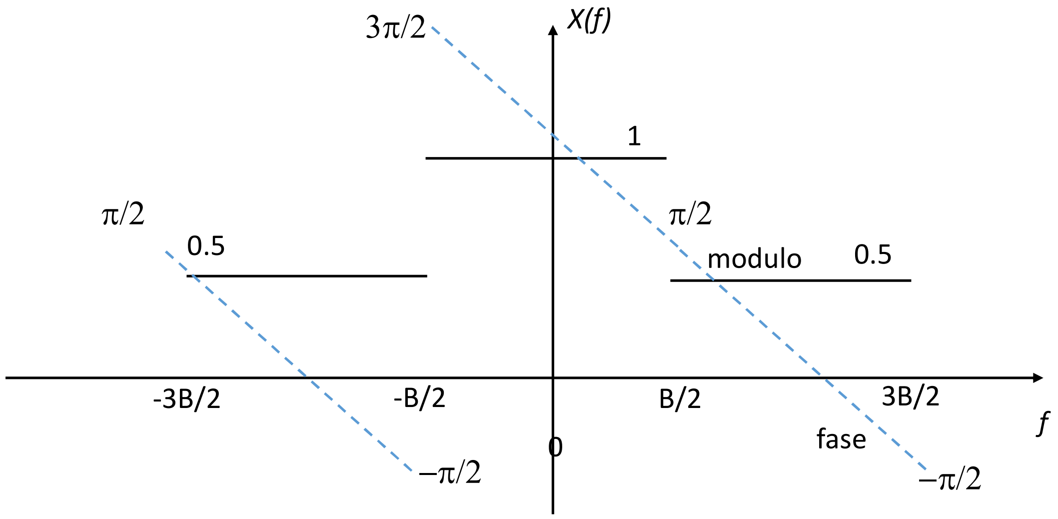
Nella banda $-\frac{1}{2}B \le f \le \frac{1}{2}B$, la trasformata vale:

$$X(f) = \frac{1}{2} e^{-i2\pi\left(f-\frac{B}{2}\right)\tau} + \frac{1}{2} e^{-i2\pi\left(f+\frac{B}{2}\right)\tau} = e^{-i2\pi f\tau}\cos(2\pi B\tau)$$

Se $\tau = \frac{1}{2B}$

$$X(f) = e^{-i2\pi f\frac{1}{2B}}\cos\left(2\pi B\frac{1}{2B}\right) = -\,e^{-i\pi f\frac{1}{B}}$$

I grafici di modulo e fase sono dunque:



B) $Y(f) = X(f)H(f) = -\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{8}\delta(f - B) + \frac{1}{8}\delta(f + B)$ da cui

$y(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cos(2\pi Bt)$

Soluzione Esercizio 2 del 22/7/2023

A) Il segnale $x(t)$ è:

$$x(t) = tri(t) - tri(t+1)$$

Dove: $tri(t) = rect(t) * rect(t)$

Campionando con frequenza di campionamento $f_s = 1$ si ottiene:

$$x_n = \delta_n - \delta_{n+1}$$

Il segnale ricostruito direttamente nel dominio del tempo sarà dato dalla seguente convoluzione:

$$x_R(t) = \big(\delta(t) - \delta(t+1)\big) * \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} - \frac{\sin\big(\pi(t+1)\big)}{\pi(t+1)}$$

B) La DFT è:

$$X_k = 1 - e^{+j\frac{2\pi k}{32}}$$

<u>**Soluzione**</u> <u>Esercizio 3 del 22/7/2023</u>

A) L'autocorrelazione del processo dato è: $R_x(\tau) = \frac{\sin(\pi\tau)}{\pi\tau} + 4$

$$y(t) = \left(\frac{1}{2}x(t) - \frac{1}{4}x(t-3) - \frac{1}{4}x(t+2)\right)$$

Il valor medio di $y(t)$ è nullo dato che l'integrale della risposta all'impulso è nullo.

Dato che l'autocovarianza di $x(t)$ è nulla per tutti i valori di τ interi, la varianza di $y(t)$ è:

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{4}\sigma_x^2 + \frac{1}{16}\sigma_x^2 + \frac{1}{16}\sigma_x^2 = \frac{3}{8}$$

B) La densità spettrale di potenza di $y(t)$ si calcola dalla nota formula:

$$S_y(f) = S_x(f)|H(f)|^2$$

dove

$$|H(f)|^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{-j6\pi f} - \frac{1}{4}e^{j4\pi f}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{j6\pi f} - \frac{1}{4}e^{-j4\pi f}\right)$$
$$= \frac{3}{8} - \frac{1}{4}\cos(6\pi f) - \frac{1}{4}\cos(4\pi f) + \frac{1}{8}\cos(10\pi f)$$

Dunque:

$$S_y(f) = [rect(f) + 4\delta(f)]\left[\frac{3}{8} - \frac{1}{4}\cos(6\pi f) - \frac{1}{4}\cos(4\pi f) + \frac{1}{8}\cos(10\pi f)\right] =$$

$$= rect(f)\left[\frac{3}{8} - \frac{1}{4}\cos(6\pi f) - \frac{1}{4}\cos(4\pi f) + \frac{1}{8}\cos(10\pi f)\right]$$

C) Il processo $z(t) = y(t) + \cos(10\pi t)$ non è stazionario in quanto il suo valor medio dipende dal tempo: $m_z = \cos(10\pi t)$.

La varianza di $z(t)$ è uguale a quella di $y(t)$: $\sigma_z^2 = \frac{3}{8}$

Il valore quadratico medio di $z(t)$ è dato dalla varianza sommata al valor medio al quadrato: $E[z^2] = \frac{3}{8} + \cos^2(10\pi t)$