Segnali per le comunicazioni –Appello del 16/7/2022

Gli esercizi devono essere svolti nel tempo massimo di 2h

Esercizio 1

Sia dato il segnale $x(t) = \left[\frac{\sin[2\pi(t-1)]}{\pi(t-1)}\right]^2 \sin\big(2\pi(t-1)\big)$

A) Si trovi l'espressione analitica della sua trasformata di Fourier $X(f)$

B) Si traccino i grafici del modulo e della fase di $X(f)$.

Esercizio 2

Si campioni il segnale tempo continuo $x(t) = \frac{\sin(3\pi t)}{\pi t}\cos(16\pi t + \theta)$ con intervallo di campionamento T.

A) Si trovi <u>il più grande valore di T</u> per cui il segnale ricostruito sia $x_R(t) = \frac{\sin(3\pi t)}{\pi t}\cos(\theta)$ (*suggerimento: confrontare i grafici della trasformata di Fourier del segnale di partenza e di quello ricostruito e determinate come passare dall'uno all'altro campionando nel tempo).*

B) Si trovi l'espressione del segnale ricostruito $x_R(t)$ se $T = \frac{1}{6}$.

Esercizio 3

Sia dato il processo casuale x_n stazionario bianco a valor medio unitario e varianza unitaria. Il processo viene filtrato con un sistema LTI con risposta in frequenza $\widetilde{H}(f) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\pi f + \frac{1}{4}\cos 4\pi f$ ottenendo il processo filtrato y_n.

A) Si trovi la potenza del processo filtrato y_n (*suggerimento: scegliete se fare i conti nel dominio della frequenza o in quello del tempo per semplificare i conti*).

B) Si calcoli l'autocorrelazione del processo casuale $z_n = y_{5n} - 2$

Soluzione Esercizio 1 del 16/7/2022

A) Si trovi l'espressione della trasformata di Fourier $X(f)$.

La trasformata di $\left[\frac{\sin[2\pi t]}{\pi t}\right]^2$ è $2 \cdot tri\left(\frac{f}{2}\right)$ dove $tri(f) = rect(f) * rect(f)$

La trasformata di $\left[\frac{\sin[2\pi t]}{\pi t}\right]^2 \sin(2\pi t)$ è $j \cdot \left[tri\left(\frac{f+1}{2}\right) - tri\left(\frac{f-1}{2}\right)\right]$

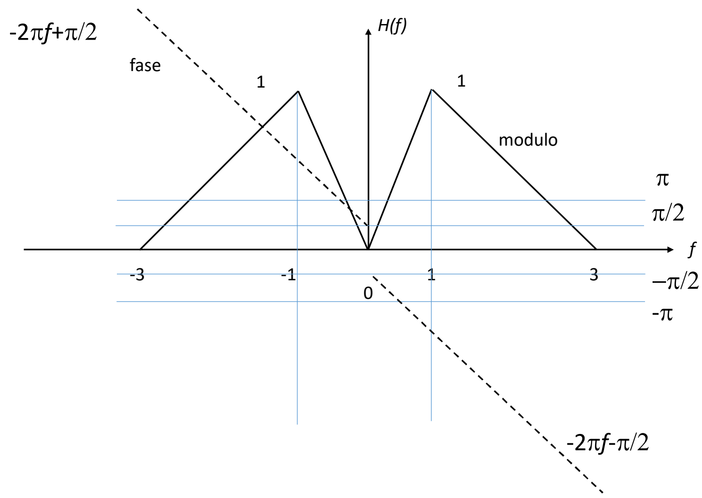
La trasformata di $x(t) = \left[\frac{\sin[2\pi(t-1)]}{\pi(t-1)}\right]^2 \sin\big(2\pi(t-1)\big)$ è:

$$X(f) = j \cdot \left[tri\left(\frac{f+1}{2}\right) - tri\left(\frac{f-1}{2}\right)\right] e^{-j2\pi f} =$$
$$= \left[tri\left(\frac{f+1}{2}\right) - tri\left(\frac{f-1}{2}\right)\right] e^{-j\left(2\pi f - \frac{\pi}{2}\right)}$$

B) Per tracciare il grafico del modulo e quello della fase di $H(f)$ si noti che:

$$H(f) = \begin{cases} tri\left(\frac{f-1}{2}\right) e^{-j\left(2\pi f + \frac{\pi}{2}\right)} & 1 < f < 3 \\ tri\left(\frac{f+1}{2}\right) e^{-j\left(2\pi f - \frac{\pi}{2}\right)} & -3 < f < -1 \\ \left[tri\left(\frac{f+1}{2}\right) - tri\left(\frac{f-1}{2}\right)\right] e^{-j\left(2\pi f - \frac{\pi}{2}\right)} = 2f e^{-j\left(2\pi f + \frac{\pi}{2}\right)} & -1 < f < 1 \end{cases}$$

Modulo e fase sono riportati nella figura seguente.



Soluzione Esercizio 2 del 16/7/2022

A) La trasformata di $x(t)$ è:

$$X(f) = \frac{1}{2} e^{j\theta} rect\left(\frac{f-8}{3}\right) + \frac{1}{2} e^{-j}\ rect\left(\frac{f+8}{3}\right)$$

La trasformata del segnale ricostruito è:

$$X_R(f) = \cos\theta \cdot rect\left(\frac{f}{3}\right)$$

L'intervallo di campionamento deve introdurre alias e portare alla conversione in frequenza del segnale di partenza.

La frequenza di campionamento $\frac{1}{T}$ deve essere il più piccolo sottomultiplo di 8 (1, 2, 4 o 8) maggiore della banda del segnale modulato B=3. Quindi $T = \frac{1}{4}$.

B) Se $T = \frac{1}{6}$, la trasformata del segnale ricostruito vale:

$$X_R(f) = \begin{cases} \cos\theta & -3 < f < -2.5 \\ {}^1\!/_2\, e^{-j\theta} & -2.5 < f < -0.5 \\ {}^1\!/_2\, e^{j\theta} & 0.5 < f < 2.5 \\ \cos\theta & 2.5 < f < 3 \end{cases}$$

L'espressione del segnale ricostruito è quindi:

$$x_R(t) = 2\cos(\theta)\frac{\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\pi t}\cos(\pi 5.5 t) + \frac{\sin(2\pi t)}{\pi t}\cos(3\pi t + \theta)$$

Soluzione Esercizio 3 del 16/7/2022

A) Il processo è convoluto con la seguente risposta all'impulso $h_n = \frac{1}{2}\delta_n + \frac{1}{4}\delta_{n\pm1} + \frac{1}{8}\delta_{n\pm2}$

Dunque $y_n = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{4}x_{n\pm1} + \frac{1}{8}x_{n\pm2}$

I campioni di x_n sono tra di loro incorrelati e dunque la varianza di y_n è banalmente:

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{4}\sigma_x^2 + \frac{2}{16}\sigma_x^2 + \frac{2}{64}\sigma_x^2 = \frac{13}{32}$$

Il valor medio di y_n è:

$$m_y = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{2}{8}\right) m_x = \frac{5}{4}$$

La potenza di y_n è:

$$P_y = \sigma_y^2 + m_y^2 = \frac{13}{32} + \frac{25}{16} = \frac{63}{32}$$

B) L'autocorrelazione del processo casuale $z_n = y_{5n} - 2$ si calcola facilmente se si nota l'autocovarianza di y_n va a zero dal quinto campione in poi e quindi i campioni di z_n sono tra di loro incorrelati.

Dunque:

$$R_z[m] = \sigma_z^2\delta_m + m_z^2 = \sigma_y^2\delta_m + \left(m_y - 2\right)^2 = \frac{13}{32}\delta_m + \frac{9}{16}$$