Segnali per le comunicazioni – Appello del 15/7/2025

Gli esercizi devono essere svolti nel tempo massimo di 2h

Esercizio 1

Sia consideri il segnale $x(t) = \left[\frac{\sin(2\pi(t-3))}{\pi(t-3)}\right]^2 \sin(2\pi t)$

A) Si calcoli l'espressione analitica della risposta in frequenza $X(f)$

B) Si traccino i grafici di modulo e fase di $X(f)$

C) Si trovi l'espressione del segnale: $y(t) = x(t) * \cos(\pi t)$.

Esercizio 2

Si campioni il segnale tempo continuo $x(t) = \frac{\sin(50\pi(t-\tau))}{\pi(t-\tau)}$ con frequenza di campionamento $f_s = 10$ ottenendo il segnale discreto x_n.

A) Si trovi l'espressione del segnale $x_R(t)$ tempo continuo ricostruito dai campioni di x_n.

B) Si trovi l'espressione della DFT di x_n con $\tau = {}^1\!/_2$ e $0 \le n \le 50$.

Esercizio 3

Sia dato il processo casuale stazionario reale $x(t)$ con densità di probabilità delle ampiezze gaussiana con valor medio $m_x = 2$ e varianza $\sigma_x^2 = 4$. Si sa inoltre che la densità spettrale di potenza vale $S_x(f) = A\left[\frac{\sin(2\pi f)}{\pi f}\right]^2 + B\delta(f)$.

A –Si trovi l'espressione dell'autocorrelazione $R_x(\tau)$ del processo dato $x(t)$.

B – Il processo $x(t)$ viene ritardato di un secondo e sottratto a se stesso, formando il processo $y(t) = x(t) - x(t-1)$. Si calcoli la potenza del processo $y(t)$.

C – il processo $y(t)$ viene campionato a passo T ottenendo il processo discreto y_n.

Sia $z_n = y_n + y_{n-1}$.

Dire per quali valori di T: $\sigma_z^2 = 2\sigma_y^2$, $\sigma_z^2 < 2\sigma_y^2$ e $\sigma_z^2 > 2\sigma_y^2$.

(Suggerimento: disegnare l'autocorrelazione del processo $y(t)$)

<u>**Soluzione**   Esercizio 1 del 19/6/2025</u>

A) Si parte da $v(t) = \left[\frac{\sin(2\pi(t-3))}{\pi(t-3)}\right]^2$ che ha la deguente trasformata:

$V(f) = 2 \cdot tri\left(\frac{f}{2}\right) e^{-i2\pi 3f}$ dove $tri(f) = rect(f) * rect(f)$

Quindi $x(t) = v(t)\ \sin(2\pi t)$ avrà come trasformata di Fourier:

$$X(f) = \frac{j}{2}V(f+1) - \frac{j}{2}V(f-1)$$

$$X(f) = j \cdot tri\left(\frac{f+1}{2}\right)e^{-i2\pi 3(f+1)} - j \cdot tri\left(\frac{f-1}{2}\right)e^{-i2\pi 3(f-1)}$$

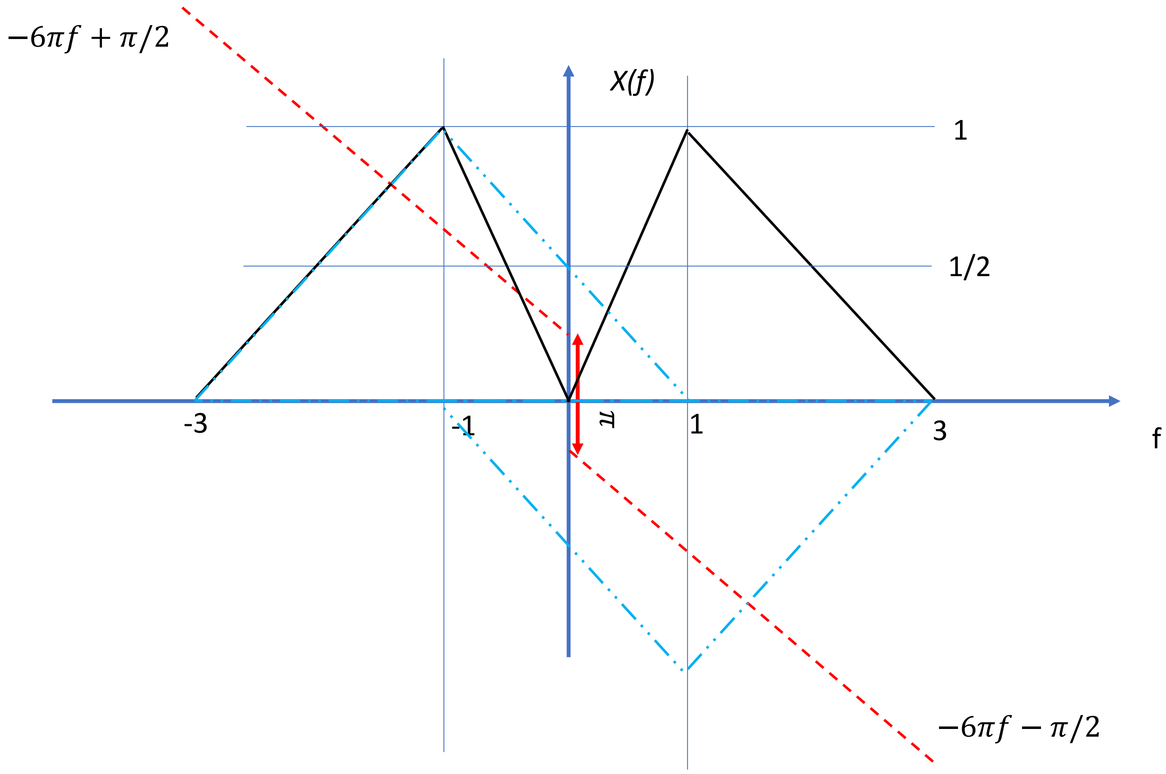
$$X(f) = j \cdot e^{-i2\pi 3f}\ \left[tri\left(\frac{f+1}{2}\right) - tri\left(\frac{f-1}{2}\right)\right]$$

B) Si nota che

$$|X(f)| = \left|tri\left(\frac{f+1}{2}\right) - tri\left(\frac{f-1}{2}\right)\right|$$

E che la fase vale: $-6\pi f - \frac{\pi}{2}$ se $f > 0$ e $-6\pi f + \frac{\pi}{2}$ se $f < 0$

Dunque il grafico di modulo (linea continua) e fase (linea tratetggiata rossa) di $X(f)$ è il seguente:



C) $Y(f) = \frac{1}{2}\delta\left(f-\frac{1}{2}\right)X\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\delta\left(f+\frac{1}{2}\right)X\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}e^{-i\left(3\pi+\frac{\pi}{2}\right)}\delta\left(f-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}e^{i\left(3\pi+\frac{\pi}{2}\right)}\delta\left(f+\frac{1}{2}\right)$

Dunque:

$y(t) = \frac{1}{4}e^{-i\left(3\pi+\frac{\pi}{2}\right)}e^{i\pi t} + \frac{1}{4}e^{i\left(3\pi+\frac{\pi}{2}\right)}e^{-i\pi t} = \frac{1}{2}\cos\left(\pi t - 7\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}\sin(\pi t)$

<u>Soluzione</u> <u>Esercizio 2 del 19/6/2025</u>

A) La trasformata di $x(t) = \frac{\sin(50\pi(t-\tau))}{\pi(t-\tau)}$ è un rettangolo di banda bilatera 50 e fase lineare decrescente:

$$X(f) = rect\left(\frac{f}{50}\right)e^{-j2\pi f\tau}$$

La trasformata del segnale ricostruito si ottiene replicando $X(f)$ a passo $f_s = 10$ e tenendo solo le componenti di frequenza nella banda $-\frac{f_s}{2} \leq f < \frac{f_s}{2}$:

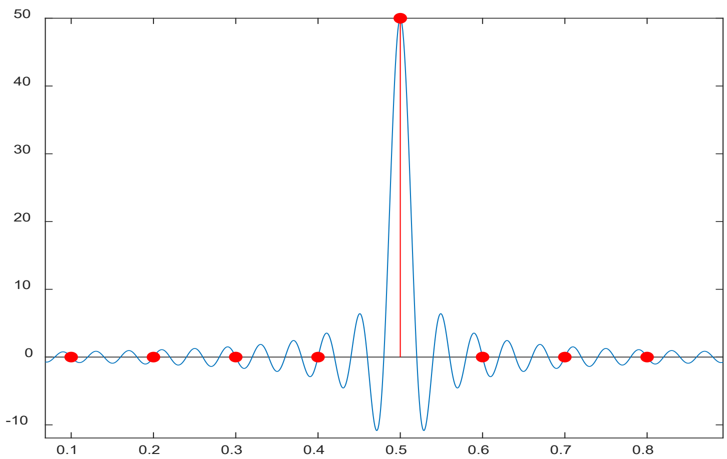
$$X_R(f) = rect\left(\frac{f}{10}\right)e^{-j2\pi f\tau} + rect\left(\frac{f}{10}\right)e^{-j2\pi(f-10)\tau} + rect\left(\frac{f}{10}\right)e^{-j2\pi(f+10)\tau} + rect\left(\frac{f}{10}\right)e^{-j2\pi(f-20)\tau} + rect\left(\frac{f}{10}\right)e^{-j2\pi(f+20)\tau}$$

$$X_R(f) = rect\left(\frac{f}{10}\right)[1 + 2\cos 2\pi 10\tau + 2\cos 2\pi 20\tau]e^{-j2\pi f\tau}$$

Il segnale tempo-continuo ricostruito ha dunque la seguente espressione:

$$x_R(t) = [1 + 2\cos 2\pi 10\tau + 2\cos 2\pi 20\tau]\frac{\sin(10\pi(t-\tau))}{\pi(t-\tau)}$$

Il grafico del segnale riscrtuito $x_R(t)$ e i campioni del segnale campionato x_n quando $\tau = {}^1\!/_2$ sono mostrati nella seguente figura.



B) L'espressione della DFT di x_n con $0 \leq n \leq 50$ si calcola facilmente notando che per $\tau = {}^1\!/_2$ e $T = 1/10$, il segnale discreto ha la seguente espressione

$$x_n = x_R\left(\frac{n}{10}\right) = x_R(t) = 5\frac{\sin\left(10\pi\left(\frac{n}{10} - {}^1\!/_2\right)\right)}{\pi\left(\frac{n}{10} - {}^1\!/_2\right)} = 50\frac{\sin(\pi(n-5))}{\pi(n-5)} = 50\delta_{n-5}$$

La DFT di x_n è quindi una costante moltiplicata per per un esponenziale complesso:

$X_k = 50e^{-j\frac{2\pi 5k}{51}}$ con $0 \leq k \leq 50$.

<u>**Soluzione**   Esercizio 3 del 19/6/2025</u>

A – Dai dati del problema:

$$R_x(\tau) = 2A \cdot tri\left(\frac{\tau}{2}\right) + B$$

Dove

$$B = m_x^2 = 4$$

$$2A = \sigma_y^2 = 4$$

B – La potenza del processo $y(t) = x(t) - x(t-1)$ è:

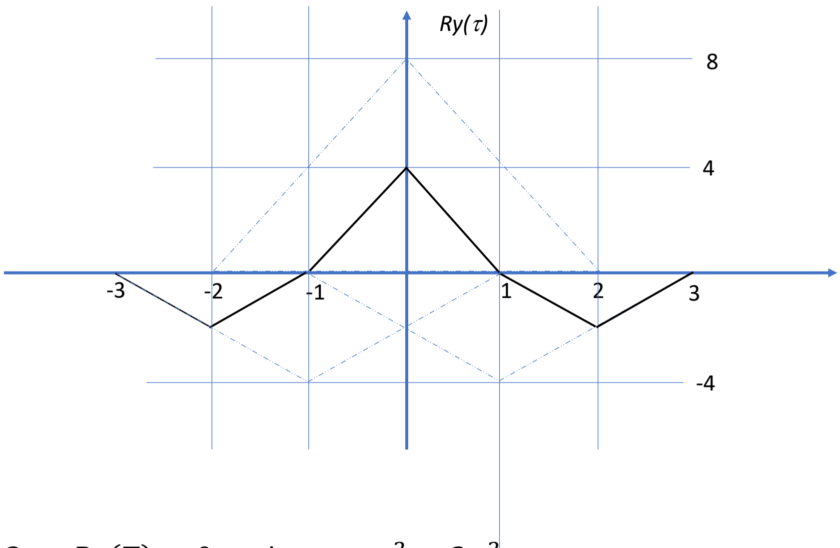
$$P_y = E[\{x(t) - x(t-1)\}^2] = 2P_x - 2R_x(1) = 2 \cdot 8 - 2 \cdot (2+4) = 4$$

C – L'autocorrelazione di y_n è data dal campionamento di

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) * \{2\delta(\tau) - \delta(\tau-1) - \delta(\tau+1)\} = 2R_x(\tau) - R_x(\tau+1) - R_x(\tau-1)$$

$$R_y(\tau) = 8tri\left(\frac{f}{2}\right) - 4tri\left(\frac{f-1}{2}\right) - 4tri\left(\frac{f+1}{2}\right)$$

Se si traccia il grafico di $R_y(\tau)$ è immediato vedere che:



Per $T = 1$ e $T \geq 3$ $\quad R_y(T) = 0$ e dunque $\sigma_z^2 = 2\sigma_y^2$

per $T < 1$ $\quad R_y(T) > 0$ e dunque $\sigma_z^2 > 2\sigma_y^2$

per $1 < T < 3$ $\quad R_y(T) < 0$ e dunque $\sigma_z^2 < 2\sigma_y^2$