Segnali per le comunicazioni –Appello del 15/7/2021

## **<u>Esercizio 1</u>** (da svolgere in 35 minuti)

Sia dato il segnale $x(t) = \frac{\sin\left(\pi B\left(t-{}^{2}/_{B}\right)\right)}{\pi\left(t-{}^{2}/_{B}\right)} + \frac{\sin\left(\pi B\left(t+{}^{2}/_{B}\right)\right)}{\pi\left(t+{}^{2}/_{B}\right)}$

**A)** Si trovi l'espressione della trasformata di Fourier $X(f)$ e se ne tracci il grafico.

(*Suggerimento: il grafico ben fatto è di aiuto anche per la soluzione del punto B*).

**B**) Si campioni $x(t)$ con frequenza di campionamento $f_s = \frac{3}{4}B$ ottenendo il segnale discreto $x_n$. Si calcoli la trasformata $X_R(f)$ del segnale tempo-continuo ricostruito e l'espressione del segnale ricostruito $x_R(t)$.

**<u>Soluzione</u>** <u>Esercizio 1 del 15/7/2021</u>

Sia dato il segnale $x(t) = \frac{\sin\left(\pi B\left(t-{}^{2}/_{B}\right)\right)}{\pi\left(t-{}^{2}/_{B}\right)} + \frac{\sin\left(\pi B\left(t+{}^{2}/_{B}\right)\right)}{\pi\left(t+{}^{2}/_{B}\right)}$

**A**) Si trovi l'espressione della trasformata di Fourier $X(f)$ e se ne tracci il grafico.

$$X(f) = rect\left(\frac{f}{B}\right) 2cos\left(2\pi f\,\frac{2}{B}\right)$$

**B**) Si campioni $x(t)$ con frequenza di campionamento $f_s = \frac{3}{4}B$ ottenendo il segnale discreto $x_n$. Si tracci il grafico della trasformata $X_R(f)$ del segnale tempo-continuo ricostruito e si calcoli l'espressione del segnale ricostruito $x_R(t)$.

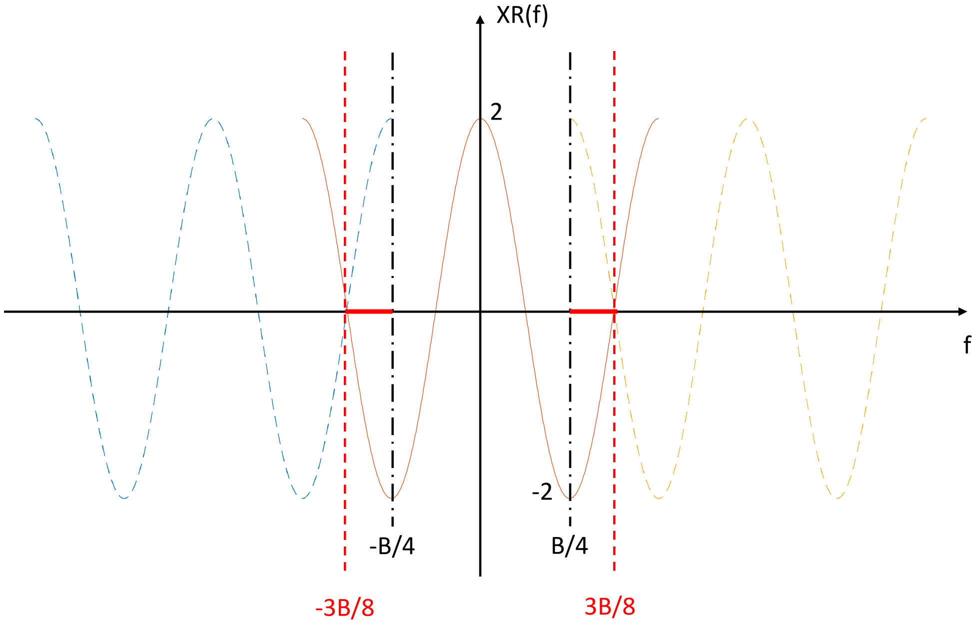
La trasformata di Fourier $X_R(f)$ del segnale ricostruito si calcola nella banda $-\frac{3}{8}B \le f \le \frac{3}{8}B$ dove vale:

$$X_R(f) = rect\left(\frac{f}{B}\right) 2cos\left(2\pi f\,\frac{2}{B}\right) + rect\left(\frac{\left(f \pm \frac{3}{4}B\right)}{B}\right) 2cos\left(2\pi\left(f \pm \frac{3}{4}B\right)\frac{2}{B}\right) =$$

$$= rect\left(\frac{f}{B}\right) 2cos\left(2\pi f\,\frac{2}{B}\right) + rect\left(\frac{\left(f \pm \frac{3}{4}B\right)}{B}\right) 2cos\left(2\pi f\,\frac{2}{B} \pm 3\pi\right) =$$

$$= rect\left(\frac{f}{B}\right) 2cos\left(2\pi f\,\frac{2}{B}\right) - rect\left(\frac{\left(f \pm \frac{3}{4}B\right)}{B}\right) 2cos\left(2\pi f\,\frac{2}{B}\right)$$

Aiutandosi con il grafico di $X_R(f)$ mostrato in figura, si ottiene $X_R(f) = rect\left(\frac{2f}{B}\right) 2cos\left(2\pi f\,\frac{2}{B}\right)$



Da qui è facile ricavare l'espressione del segnale ricostruito:

$$x_R(t) = \frac{\sin\left(\pi \frac{B}{2}\left(t - {}^{2}/_{B}\right)\right)}{\pi\left(t - {}^{2}/_{B}\right)} + \frac{\sin\left(\pi \frac{B}{2}\left(t + {}^{2}/_{B}\right)\right)}{\pi\left(t + {}^{2}/_{B}\right)}$$

Segnali per le comunicazioni –Appello del 15/7/2021

**<u>Esercizio 2</u>** (da svolgere in 35 minuti)

Sia dato il processo casuale discreto $x_n$ stazionario con densità di probabilità delle ampiezze $p_x(a)$ che è uniforme e compresa tra -2 e 4 e nulla altrove. Il coefficiente di correlazione del processo $\rho_x[m]$ è nullo per $|m| > 1$. Si sa inoltre che l'autocorrelazione del processo in $m = 1$ vale 2.

**A)** Si trovi l'espressione della densità spettrale di potenza del processo dato.

**B)** Quanto vale la varianza di $y_n = x_n - x_{n-1}$?

**C)** I campioni del processo $x_n$ con ampiezze negative vengono cambiati di segno e moltiplicati per 2, ottenendo il processo $z_n$. Si può affermare senza far conti se la varianza del processo $z_n$ è minore, maggiore o uguale a quella del processo $x_n$? E la potenza?

## Soluzione Esercizio 2 del 15/7/2021

Sia dato il processo casuale discreto $x_n$ stazionario con densità di probabilità delle ampiezze $p_x(a)$ che è uniforme e compresa tra -2 e 4 e nulla altrove. Il coefficiente di correlazione del processo $\rho_x[m]$ è nullo per $|m| > 1$. Si sa inoltre che l'autocorrelazione del processo in $m = 1$ vale 16.

**A)** Si trovi l'espressione della densità spettrale di potenza del processo dato.

Questa è la trasformata di Fourier dell'autocorrelazione del processo:

$$R_x[m] = \sigma_x^2 \rho_x[m] + m_x^2 = \sigma_x^2(\delta_m + a\delta_{m\pm1}) + m_x^2$$

Il valor medio e la varianza del processo si calcolano dalla densità di probabilità delle ampiezze:

$$m_x = \int_{-2}^{4} \frac{a}{6} da = \frac{4-2}{2} = 1$$
$$\sigma_x^2 = \int_{-2}^{4} \frac{a^2}{6} da - m_x^2 = \frac{6^2}{12} = 3$$

Dato che l'autocorrelazione del processo in $m = 1$ vale 2:

$3a + 1 = 2,\ a = \frac{1}{3}$ e dunque $R_x[m] = 3\delta_m + \delta_{m\pm1} + 1$

La densità spettrale di potenza del processo vale:

$S_x(f) = 3 + 2cos(2\pi f) + \delta(f)$ periodica di periodo 1

**B)** Quanto vale la varianza di $x_n - x_{n-1}$? Dato che il processo $y_n$ ha valor medio nullo:

$$\sigma_y^2 = E[y_n^2] = E[x_n^2 + x_{n-1}^2 - 2x_n x_{n-1}] = 2R_x[0] - 2R_x[1] = 8 - 4 = 4$$

**C)** I campioni del processo $x_n$ con ampiezze negative vengono cambiati di segno e moltiplicati per 2, ottenendo il processo $z_n$. La varianza del processo $z_n$ è minore, maggiore o uguale a quella del processo $x_n$? E la potenza?

La varianza del processo $z_n$ è minore di quella del processo $x_n$ perché la densità di probabilità dei valori di $z_n$ è uniforme tra 0 e 4 e quindi meno dispersa rispetto al suo valor medio della densità di probabilità dei valori di $x_n$ che è uniforme tra -2 e 4.

La potenza invece aumenta. Infatti la potenza di $x_n$ $R_x[0] = 4$ e il solo valor medio di $z_n$ al quadrato è uguale a 4.