SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI (Prati)
Secondo Appello – 21 Luglio 2016

La prima parte degli esercizi presenta una difficolta' minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficolta' nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficolta'.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova è 2h e 15minuti.

ESERCIZIO 1

Sia dato il segnale $x(t)=\cos\left(\frac{\pi}{2}t+\phi_1\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}t+\phi_2\right)$.

a - Si calcoli l'espressione della trasformata $X(f)$ del segnale dato.

b - Si calcoli l'uscita $y(t)$ del sistema LTI con risposta in frequenza $H(f)=[rect(f)*rect(f)]e^{-j2\pi f\tau}$ quando all'ingresso si pone il segnale dato $x(t)$

c - Il risultato cambierebbe se si utilizzasse un sistema LTI con risposta in frequenza $H(f)=\left[rect(f)e^{-j2\pi f\tau}*rect(f)e^{-j2\pi f\tau}\right]$?

ESERCIZIO 2

Sia dato il segnale tempo continuo $x(t)=2\cos(2\pi f_o(t-\tau))+2\cos(4\pi f_o(t-\tau))$.

a - Il segnale dato viene campionato con frequenza di campionamento $f_s=f_o$ Hz. Si traccino i grafici della trasformata di Fourier del segnale campionato x_n sia in frequenza che in frequenza normalizzata.

b – Trovare l'espressione del segnale tempo continuo ricostruito dal segnale campionato x_n.

c – Calcolare la potenza del segnale ricostruito $\hat{x}(t)$ e quella del segnale $x(t)$ dato.

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale stazionario discreto x_n bianco con densità di probabilità delle ampiezze $p_x(a)=2a\cdot rect\left(a-\frac{1}{2}\right)$.

a - Si calcoli l'espressione dell'autocorrelazione $R_x[m]$.

b – Il processo x_n viene fatto passare attraverso un filtro con risposta all'impulso $h_n=\delta_n+2\delta_{n-1}+3\delta_{n-2}$. Si calcoli valor medio, varianza e potenza del processo casuale in uscita.

SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI (Prati)
Secondo Appello – 21 Luglio 2016

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a – La trasformata di $x(t)=\cos\left(\frac{\pi}{2}t+\phi_1\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}t+\phi_2\right)$ si può calcolare come convoluzione tra coppie d'impulsi nelle frequenze.

$$X(f)=\left[\frac{1}{2}e^{j\phi_1}\delta\left(f-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}e^{-j\phi_1}\delta\left(f+\frac{1}{4}\right)\right]*\left[\frac{1}{2}e^{j\phi_2}\delta\left(f-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}e^{-j\phi_2}\delta\left(f+\frac{1}{4}\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{4}e^{j(\phi_1+\phi_2)}\delta\left(f-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}e^{-j(\phi_1+\phi_2)}\delta\left(f+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\cos(\phi_1-\phi_2)\delta(f)$$

b - La trasformata dell'uscita è:

$$H(f)=[rect(f)*rect(f)]e^{-j2\pi f\tau}$$

$$Y(f)=X(f)H(f)=$$
$$=\frac{1}{2}\cos(\phi_1-\phi_2)\delta(f)+\frac{1}{8}e^{j(\phi_1+\phi_2-\pi\tau)}\delta\left(f-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{8}e^{-j(\phi_1+\phi_2-\pi\tau)}\delta\left(f+\frac{1}{2}\right)$$

Anti-trasformando si ottiene:

$$y(t)=\frac{1}{2}\cos(\phi_1-\phi_2)+\frac{1}{8}e^{j(\phi_1+\phi_2-\pi\tau)}\exp\{j\pi t\}+\frac{1}{8}e^{-j(\phi_1+\phi_2-\pi\tau)}\exp\{-j\pi t\}=$$
$$=\frac{1}{2}\cos(\phi_1-\phi_2)+\frac{1}{4}\cos(\pi(t-\tau)+\phi_1+\phi_2)$$

c - Il risultato non cambia dato che

$$[rect(f)*rect(f)]e^{-j2\pi f\tau}=\left[rect(f)e^{-j2\pi f\tau}*rect(f)e^{-j2\pi f\tau}\right]$$

Anti-trasformando il termine a sinistra si ottiene un seno cardinale al quadrato ritardato di un secondo. Anti-trasformando il termine a destra si trova un seno cardinale ritardato di un secondo moltiplicato per se stesso.

Attenzione: in generale NON è vero che $[rect(f)*rect(f)]X(f)=[rect(f)X(f)*rect(f)X(f)]$
Per convincersene è sufficiente considerare il caso in cui nell'espressione precedente $X(f)=rect(f)$.

ESERCIZIO 2

a – La trasformata del segnale tempo continuo $x(t)=2\cos(2\pi f_o(t-\tau))+2\cos(4\pi f_o(t-\tau))$ è:

$$X(f)=\exp\{j2\pi f_o\tau\}\delta(f+f_o)+\exp\{-j2\pi f_o\tau\}\delta(f-f_o)+\exp\{j4\pi f_o\tau\}\delta(f+2f_o)+\exp\{-j4\pi f_o\tau\}\delta(f-2f_o)$$

Quella del segnale discreto campionato con $f_s=f_o$ Hz vale (teorema del campionamento):

$$\widetilde{X}(f)=f_o[\exp\{j2\pi f_o\tau\}+\exp\{-j2\pi f_o\tau\}+\exp\{-j4\pi f_o\tau\}+\exp\{j4\pi f_o\tau\}]\delta(f)=$$
$$=2f_o[\cos(2\pi f_o\tau)+\cos(4\pi f_o\tau)]\delta(f)$$

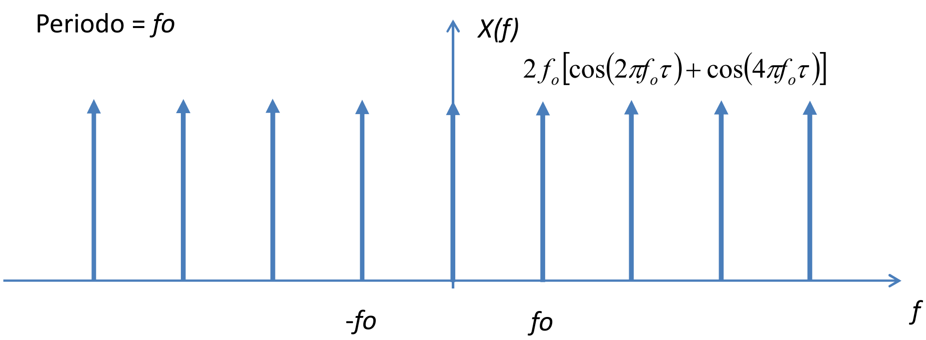
Periodica di periodo $f_s=f_o$.

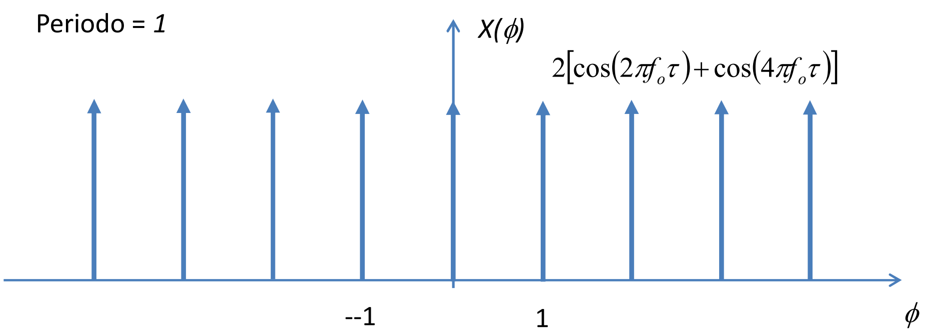
Passando alla frequenza normalizzata $f=\dfrac{\phi}{T}=\phi f_o$

$$\widetilde{X}(\phi)=2f_o[\cos(2\pi f_o\tau)+\cos(4\pi f_o\tau)]\delta(\phi f_o)=2[\cos(2\pi f_o\tau)+\cos(4\pi f_o\tau)]\delta(\phi)$$

Periodica di periodo 1.

Graficamente i risultati sono illustrati nelle seguenti figure sia in frequenza che in frequenza normalizzata.





b – Il segnale ricostruito tramite filtro di ricostruzione ideale passa-basso nella banda $f = \pm \frac{f_o}{2}$ Hz con ampiezza $T = \frac{1}{f_o}$ è ovviamente una costante:

$$\hat{x}(t) = 2[\cos(2\pi f_o \tau) + \cos(4\pi f_o \tau)]$$

c – La potenza del segnale ricostruito $\hat{x}(t)$ è banalmente il valore della costante al quadrato:

$$P_{\hat{x}(t)} = 4[\cos(2\pi f_o \tau) + \cos(4\pi f_o \tau)]^2$$

La potenza di $x(t)$ somma di 2 cosinusoidi a frequenze diverse è data dalla somma delle potenze delle 2 sinusoidi. Infatti il minimo periodo comune multiplo delle due cosinusoidi è $T_o = \frac{1}{f_o}$ (ma si potrebbe utilizzare qualsiasi periodo comune, anche l'infinito) e dalla definizione di potenza:

$$P_{x(t)} = \frac{1}{T_o} \int_{T_o} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_o} \int_{T_o} |2\cos(2\pi f_o (t-\tau)) + 2\cos(4\pi f_o (t-\tau))|^2 dt =$$

$$= \frac{1}{T_o} \int_{T_o} |2\cos(2\pi f_o (t-\tau))|^2 dt + \frac{1}{T_o} \int_{T_o} |2\cos(4\pi f_o (t-\tau))|^2 dt = 4$$

Infatti il doppio prodotto dello sviluppo del quadrato ha integrale nullo.

Ricordando che $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha + \beta)$ si ottiene:

$$\frac{1}{T_o} \int_{T_o} 8\cos(2\pi f_o (t-\tau))\cos(4\pi f_o (t-\tau)) dt = \frac{4}{T_o} \int_{T_o} \cos(2\pi f_o (t-\tau)) dt + \frac{4}{T_o} \int_{T_o} \cos(6\pi f_o (t-\tau)) dt = 0$$

ESERCIZIO 3

a – Un processo casuale discreto bianco ha in generale la seguente funzione di autocorrelazione:

$$R_x[m] = \sigma_x^2 \delta_m + m_x^2$$

Valor medio e varianza si calcolano dalla densità di probabilità delle ampiezze:

$$m_x = \int a p_x(a) da = \int_0^1 2a^2 da = \frac{2}{3}.$$

$$E\left[x^2\right]=\int a^2 p_x(a)da=\int_0^1 2a^3 da=\frac{1}{2}$$

$$\sigma_x^2=E\left[x^2\right]-m_x^2=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}$$

L'autocorrelazione ha dunque la seguente espressione:

$$R_x[m]=\tfrac{1}{18}\delta_m+\tfrac{4}{9}$$

b – Il processo casuale d'uscita ha come valor medio:

$$m_y=m_x\cdot(1+2+3)=\frac{12}{3}=4$$

L'autocorrelazione dell'uscita vale:

$$R_y[m]=\left(\tfrac{1}{18}\delta_m+\tfrac{4}{9}\right)*\left(14\delta_m+8\delta_{m\pm1}+3\delta_{m\pm2}\right)=\tfrac{7}{9}\delta_m+\tfrac{4}{9}\delta_{m\pm1}+\tfrac{3}{18}\delta_{m\pm2}+16$$

La potenza dell'uscita è: $P_y=R_y[0]=\frac{7}{9}+16=\frac{151}{9}$

La varianza dell'uscita è: $\sigma_y^2=R_y[0]-m_x^2=\frac{7}{9}$