SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI sesto appello – 16 Febbraio 2016

Il tempo massimo per lo svolgimento della prova è 2h.

ESERCIZIO 1

Sia dato un sistema LTI con risposta in frequenza $H(f)$ il cui grafico è mostrato in figura 1.

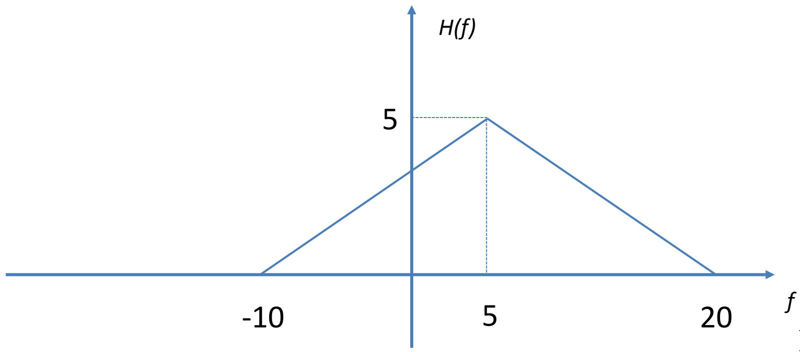

Figura 1 – Grafico di $H(f)$

a - Si calcoli l'espressione della risposta all'impulso del sistema dato.

b - Si calcoli l'espressione dell'uscita $y(t)$ del sistema dato quando all'ingresso si pone il segnale $x(t) = \cos(10\pi(t-1))$.

c - Si calcoli il valore della potenza dell'uscita $y(t)$.

ESERCIZIO 2

Il segnale tempo continuo $x(t) = rect(t-0.1)$ viene campionato con frequenza di campionamento $f_s = 4\,\text{Hz}$ ottenendo il segnale discreto x_n.

b - Trovata l'espressione di x_n, si ricavi l'espressione della trasformata di Fourier $\tilde{X}(f)$ e della trasformata di Fourier in frequenza normalizzata $\tilde{X}(\phi)$ del segnale discreto x_n.

c – Si calcoli l'espressione della DFT di 5 campioni di x_n.

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale stazionario gaussiano discreto bianco x_n con valor medio nullo e varianza unitaria.

a - Si scrivano le espressioni di autocorrelazione, autocovarianza, coefficiente di correlazione e densità spettrale di potenza del processo x_n.

b – Il processo x_n viene convoluto con una risposta all'impulso $h_n = \delta_n + a\delta_{n-1}$, generando il processo casuale $y_n = x_n * h_n$. Si calcoli l'autocorrelazione del processo y_n sapendo che la potenza della somma di due campioni consecutivi di y_n è $\frac{3}{2}$.

SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI sesto appello – 16 Febbraio 2016

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a – Il grafico della risposta in frequenza è un triangolo di banda 30Hz (convoluzione di 2 rettangoli di banda 15Hz) traslato di 5Hz rispetto all'origine. La sua anti-trasformata di Fourier sarà dunque un seno cardinale al quadrato moltiplicato per un esponenziale complesso.

$$h(t) = A\left(\frac{\sin \pi 15t}{\pi t}\right)^2 \exp\{j2\pi 5t\}$$

L'ampiezza del seno cardinale nell'origine deve essere uguale all'integrale della risposta in frequenza:

$$A \cdot 225 = 75 \qquad A = \frac{1}{3} \qquad h(t) = \frac{1}{3}\left(\frac{\sin \pi 15t}{\pi t}\right)^2 \exp\{j2\pi 5t\}$$

b - La trasformata di $x(t)$ è costituita da 2 impulsi:

$$X(f) = \frac{1}{2}\delta(f-5)\exp\{-j2\pi f\} + \frac{1}{2}\delta(f+5)\exp\{-j2\pi f\} = \frac{1}{2}\exp\{-j10\pi\}\delta(f-5) + \frac{1}{2}\exp\{j10\pi\}\delta(f+5) =$$
$$= \frac{1}{2}\delta(f-5) + \frac{1}{2}\delta(f+5)$$

A riprova della correttezza del risultato si noti che: $x(t) = \cos(10\pi(t-1)) = \cos(10\pi t)$

La trasformata dell'uscita è quindi:

$$Y(f) = X(f)H(f) = \frac{5}{2}\delta(f-5) + \frac{5}{6}\delta(f+5)$$

L'uscita del sistema ha la seguente espressione:

$$y(t) = \frac{5}{2}\exp\{j10\pi f\} + \frac{5}{6}\exp\{-j10\pi f\}$$

c – La potenza dell'uscita si calcola immediatamente dalla definizione nel dominio del tempo come limite per $T \Rightarrow \infty$:

$$P = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |y(t)|^2 dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \frac{25}{4} + \frac{25}{36} + \frac{25}{12}\exp\{j20\pi t\} + \frac{25}{12}\exp\{-j20\pi t\} dt = \frac{25}{4} + \frac{25}{36} = \frac{125}{18}$$

ESERCIZIO 2

a - Il segnale $x(t) = rect(t - 0.1)$ è un rettangolo di ampiezza unitaria nell'intervallo $-0.4 < t < 0.6$.
Campionando con $T = \frac{1}{4}$ si ottengono solo 4 campioni diversi da zero: $x_n = \delta_{n+1} + \delta_n + \delta_{n-1} + \delta_{n-2}$.

La trasformata di Fourier della sequenza è per definizione:

$$\tilde{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \exp\{-j2\pi f n T\} = \sum_{n=-1}^{2} \exp\left\{-j\pi f \frac{1}{2} n\right\} = \exp\left\{j\pi f \frac{1}{2}\right\} + 1 + \exp\left\{-j\pi f \frac{1}{2}\right\} + \exp\{-j\pi f\}$$

periodica di periodo 4.

La trasformata di Fourier in frequenza normalizzata è per definizione:

$$\tilde{X}(\phi) = \tilde{X}(fT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \exp\{-j2\pi\phi n\} = \sum_{n=-1}^{2} \exp\{-j2\pi\phi n\} = \exp\{j2\pi\phi\} + 1 + \exp\{-j2\pi\phi\} + \exp\{-j4\pi\phi\}$$

periodica di periodo 1

b - La DFT della sequenza x_n si può calcolare direttamente dal risultato precedente:

$$X_k = \tilde{X}(f)\Big|_{f=\frac{k}{NT}} = \tilde{X}(f)\Big|_{f=\frac{4k}{5}} = \exp\left\{j\pi \frac{2k}{5}\right\} + 1 + \exp\left\{-j\pi \frac{2k}{5}\right\} + \exp\left\{-j\pi \frac{4k}{5}\right\} \text{ con } 0 \le k \le 4$$

Oppure in frequenza normalizzata:

$$X_k = \tilde{X}(\phi)\Big|_{\phi=\frac{k}{N}} = \tilde{X}(\phi)\Big|_{\phi=\frac{k}{5}} = \exp\left\{j2\pi \frac{k}{5}\right\} + 1 + \exp\left\{-j2\pi \frac{k}{5}\right\} + \exp\left\{-j4\pi \frac{k}{5}\right\} \text{ con } 0 \le k \le 4$$

Oppure si può utilizzare direttamente la definizione di DFT:

$$X_k = \sum_{n=0}^{4} (\delta_n + \delta_{n-1} + \delta_{n-2} + \delta_{n-4}) \exp\left\{-j2\pi \frac{nk}{5}\right\} = 1 + \exp\left\{-j2\pi \frac{k}{5}\right\} + \exp\left\{-j2\pi \frac{2k}{5}\right\} + \exp\left\{-j2\pi \frac{4k}{5}\right\}$$

Si noti che $\exp\left\{j2\pi \frac{k}{5}\right\} = \exp\left\{-j2\pi \frac{4k}{5}\right\}$

ESERCIZIO 3

a – Autocorrelazione, autocovarianza, e coefficiente di correlazione del processo x_n hanno la medesima espressione:

$$R_x[m] = \delta_m$$
$$C_x[m] = R_x[m] - m_x^2 = \delta_m$$
$$\rho_x[m] = \frac{C_x[m]}{\sigma_x^2} = \delta_m$$

La densità spettrale di potenza del processo x_n vale:

$$S_x(\phi) = 1$$

O, equivalentemente

$S_x(\phi) = rect(\phi)$ periodica di periodo 1.

b - Ricordando che $R_y[m] = R_x[m] * h_m * h_{-m}$ e sapendo che $h_n = \delta_n + a\delta_{n-1}$, si ottiene facilmente che

$$R_y[m] = R_x[m] * h_m * h_{-m} = \delta_m * \left[\left(1+a^2\right)\delta_m + a\delta_{m-1} + a\delta_{m+1}\right] = \left(1+a^2\right)\delta_m + a\delta_{m-1} + a\delta_{m+1}$$

La potenza della somma di due campioni consecutivi di y_n è:

$$E\left[\left(y_n + y_{n+1}\right)^2\right] = E\left[y_n^2\right] + E\left[y_{n+1}^2\right] + 2E\left[y_n y_{n+1}\right] = 2R_y[0] + 2R_y[1] = 2 + 2a^2 + 2a = \frac{3}{2}$$

Da cui

$$a = -\frac{1}{2}$$

E dunque

$$R_y[m] = \frac{5}{4}\delta_m - \frac{1}{2}\delta_{m-1} - \frac{1}{2}\delta_{m+1}$$