TELECOMUNICAZIONI sesto appello - 6 Marzo 2014

La prima parte degli esercizi presenta una difficolta' minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficolta' nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficolta'.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova e' 2h:15m.
I punteggi indicano il peso relativo dell'esercizio.

ESERCIZIO 1

Sia dato il segnale $x(t) = \cos\left(4\pi\left(t - \frac{1}{5}\right)\right)\cos(6\pi t)$

a [7]- Si calcoli la trasformata di Fourier del segnale dato
b [5]- Si calcoli l'espressione dell'uscita *y(t)* quando il segnale $x(t)$ viene posto all'ingresso di un sistema con risposta all'impulso $h(t) = \frac{\sin^2(2\pi t)\cos(4\pi t)}{\pi^2 t^2}$

ESERCIZIO 2

Si consideri il segnale $x(t) = \frac{\sin^2(\pi t)}{\pi t}$

a [7]**-** Si calcoli trasformata di Fourier di $x_n = x\left(\frac{2n}{3}\right)$ (intervallo di campionamento $T = \frac{2}{3}$).

b [5]**-** Si trovi l'espressione del segnale tempo continuo ricostruito dai campioni x_n.

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale stazionario continuo gaussiano $x(t)$ in cui tutte le realizzazioni hanno prevalentemente valori positivi. La densità spettrale di potenza del processo dato vale:
$S_x(f) = 5rect\left(\frac{f}{10}\right) + 49\delta(f)$.

a [6]- Si scriva l'espressione della densità di probabilità delle ampiezze del processo $x(t)$.
b [6]– Si ricavi l'espressione della densità di probabilità delle ampiezze del processo $y(t) = x(t) + \frac{1}{7}x(t-1)$.

TELECOMUNICAZIONI sesto appello – 6 Marzo 2014

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a) La trasformata di Fourier del segnale dato vale:

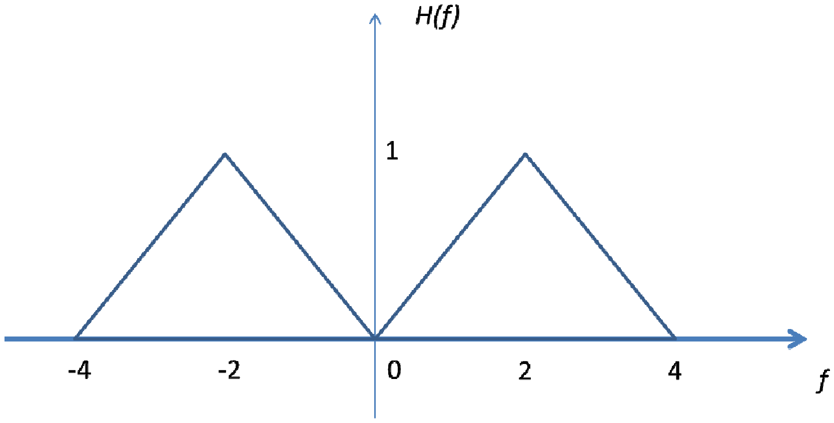
$$X(f)=\left[\frac{1}{2}e^{j\frac{4\pi}{5}}\delta(f+2)+\frac{1}{2}e^{-j\frac{4\pi}{5}}\delta(f-2)\right]*\left[\frac{1}{2}\delta(f+3)+\frac{1}{2}\delta(f-3)\right]=$$

$$=\frac{1}{4}e^{j\frac{4\pi}{5}}\delta(f+5)+\frac{1}{4}e^{-j\frac{4\pi}{5}}\delta(f+1)+\frac{1}{4}e^{j\frac{4\pi}{5}}\delta(f-1)+\frac{1}{4}e^{-j\frac{4\pi}{5}}\delta(f-5)$$

b) La risposta in frequenza del sistema dato vale (vedi figura seguente):

$$H(f)=tri\left(\frac{f-2}{4}\right)+tri\left(\frac{f+2}{4}\right)$$

dove $tri(f)$ è una funzione triangolare tra – ½ e ½ .



La trasformata di Fourier dell'uscita vale dunque:

$$Y(f) = X(f)H(f) = \left[\frac{1}{4}e^{-j\frac{4\pi}{5}}\delta(f+1) + \frac{1}{4}e^{j\frac{4\pi}{5}}\delta(f-1)\right]H(f) =$$

$$= \left[\frac{1}{8}e^{-j\frac{4\pi}{5}}\delta(f+1) + \frac{1}{8}e^{j\frac{4\pi}{5}}\delta(f-1)\right]$$

Antitrasformando si trova l'uscita:

$$y(t) = \frac{1}{4}\cos\left[2\pi t - \frac{4\pi}{5}\right]$$

ESERCIZIO 2

a – La trasformata di Fourier del segnale $x(t) = \frac{\sin^2(\pi t)}{\pi t} = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\sin(\pi t)$ è:

$$X(f) = \frac{j}{2}rect\left(f + \frac{1}{2}\right) - \frac{j}{2}rect\left(f - \frac{1}{2}\right)$$

Si campiona $x(t)$ con $T = \frac{2}{3}$. La trasformata $X(f)$ viene periodicizzata a passo $\frac{1}{T} = \frac{3}{2}$ ottenendo:

$\tilde{X}(f) = \frac{j3}{4}\left[rect\left(2f + \frac{1}{2}\right) - rect\left(2f - \frac{1}{2}\right)\right]$ periodica a passo $\frac{1}{T} = \frac{3}{2}$ in frequenza.

b – l'espressione del segnale tempo continuo ricostruito dai campioni x_n si ottiene come antitrasformata di $X_R(f) = \tilde{X}(f)\frac{2}{3}$:

$$x_R(t) = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\pi t\right)}{\pi t}\sin\left(\frac{1}{2}\pi t\right) = \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi t\right)}{\pi t}$$

ESERCIZIO 3

a – Per scrivere l'espressione della densità di probabilità delle ampiezze del processo $x(t)$ è sufficiente calcolare varianza e valor medio del processo che si ricavano immediatamente dalla densità spettrale di potenza:

$$P_x = \int S_x(f)df = 99$$

$$\sigma_x^2 = P_x - |m_x|^2 = 99 - 49 = 50$$

$m_x = \pm 7$, ma dato che tutte le realizzazioni hanno prevalentemente valori positivi, $m_x = 7$

b - La densità di probabilità delle ampiezze del processo $y(t)$ è ancora gaussiana. Per scrivere l'espressione della densità di probabilità delle ampiezze del processo $y(t) = x(t) + \frac{1}{7}x(t-1)$ è sufficiente calcolare varianza e valor medio del processo $y(t) = x(t) * \left(\delta(t) + \frac{1}{7}\delta(t-1)\right)$ a partire dalla sua densità spettrale di potenza:

$$S_y(f) = S_x(f)|H(f)|^2 = \left[5 \cdot rect\left(\frac{f}{10}\right) + 49\delta(f)\right]\left(\frac{50}{49} + \frac{2}{7}\cos(2\pi f)\right) =$$
$$= 5 \cdot rect\left(\frac{f}{10}\right)\left(\frac{50}{49} + \frac{2}{7}\cos(2\pi f)\right) + 64\delta(f)$$

Dunque:

$$P_y = \int S_x(f)df = 64 + 5\int_{-5}^{5}\left(\frac{50}{49} + \frac{2}{7}\cos(2\pi f)\right)df = 64 + \frac{2500}{49}$$

$$\sigma_y^2 = P_y - |m_y|^2 = \frac{2500}{49}$$

$m_y = \pm 8$, ma dato che tutte le realizzazioni hanno prevalentemente valori positivi, $m_y = 8$.