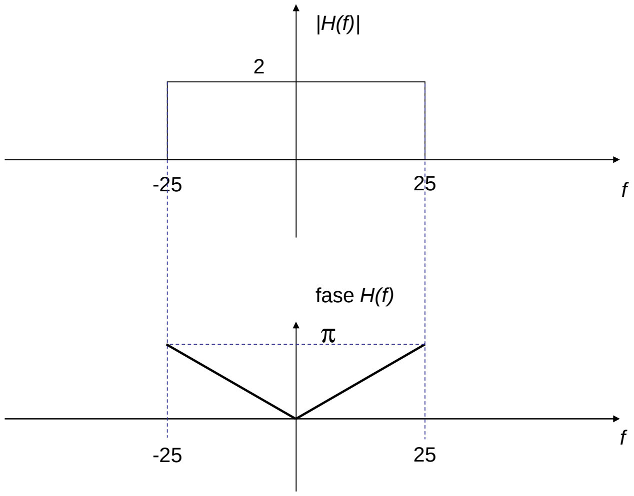
<u>**SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI appello del 5 Marzo 2015**</u>

Se s'incontrano difficoltà nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo. Il tempo massimo per lo svolgimento della prova è 2h. I punteggi indicano il peso relativo dell'esercizio.

ESERCIZIO 1

Sia dato un segnale $x(t)$ la cui trasformata di Fourier $X(f)$ ha modulo e fase espressi dai seguenti grafici:



a [7] - Si calcoli l'espressione del segnale $x(t)$

b [4] - Si calcoli l'energia del segnale $x(t)$

ESERCIZIO 2

Il segnale $x(t)=\left[\frac{\sin(\pi Bt)}{\pi t}\right]^2 e^{j2\pi Bt}$ campionato con frequenza di campionamento $f_s = BHz$, genera la sequenza x_n.

a [4] - Si dica se la frequenza di campionamento utilizzata è sufficiente per ricostruire il segnale $x(t)$

b [4] - Si calcoli l'espressione della trasformata di Fourier in frequenza $X(f)$ e in frequenza normalizzata $X(\phi)$ della sequenza x_n.

c [4] - Si verifichi che i valori della DFT Y_k di $y_n = x_{n-1} + x_{n-9}$ calcolata su $N = 10$ campioni, sono una cosinusoide in k.

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale discreto x_n gaussiano, bianco, stazionario a valor medio unitario con potenza $P = 2$.

a [6] - Si calcoli autocovarianza e densità spettrale di potenza del processo casuale x_n.

b [6] - Si calcoli la potenza del processo casuale y_n ottenuto filtrando x_n con la seguente risposta in frequenza: $H(\phi) = rect\left(4\phi + \frac{1}{4}\right) + rect\left(4\phi - \frac{1}{4}\right)$

SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI appello del 5 Marzo 2015

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a - La trasformata data può essere convenientemente divisa in due parti:

un rettangolo tra -25 e 0 con fase lineare negativa $-2\pi f/50$,
un rettangolo tra 0 e 25 con fase lineare positiva $2\pi f/50$

Anti-trasformando ognuno di questi segnali e sommando si ottiene il seguente risultato:

$$x(t) = 2\frac{\sin\left(\pi\cdot 25\cdot\left(t-\frac{1}{50}\right)\right)}{\pi\cdot\left(t-\frac{1}{50}\right)}\exp\left(-j\pi\cdot 25\cdot\left(t-\frac{1}{50}\right)\right) + 2\frac{\sin\left(\pi\cdot 25\cdot\left(t+\frac{1}{50}\right)\right)}{\pi\cdot\left(t+\frac{1}{50}\right)}\exp\left(j\pi\cdot 25\cdot\left(t+\frac{1}{50}\right)\right)$$

Si ricordino le seguenti proprietà della TF:

$$\left.\begin{array}{l} X(f+f_o) \Leftrightarrow x(t)e^{-j2\pi f_o t} \\ X(f)e^{-j2\pi f\tau} \Leftrightarrow x(t-\tau) \end{array}\right\} X(f+f_o)e^{-j2\pi f\tau} \Leftrightarrow x(t-\tau)e^{-j2\pi f_o(t-\tau)}$$

b – L'energia del segnale si calcola banalmente nel dominio delle frequenze dove il modulo quadrato della trasformata è 4 tra -25 e +25.

L'energia vale quindi 200.

ESERCIZIO 2

a - La trasformata di Fourier del segnale dato ha banda $2B$ quindi il segnale $x(t)$ non è ricostruibile dai suoi campioni utilizzando una frequenza di campionamento di B Hz.

b - La trasformata di Fourier di un segnale campionato si può calcolare in due modi:
1 - replicando a passo $f_s = BHz$ la trasformata del segnale continuo $x(t)$ moltiplicata per $f_s = B$
2 – utilizzando la definizione di Trasformata del segnale discreto che in questo caso è: $x_n = B^2\delta_n$

In entrambe i basi è facile rendersi conto che $X(f) = B^2$ e $X(\phi) = B^2$ con periodicità B e 1 rispettivamente.

c - La sequenza risultante dal campionamento è $x_n = B^2 \delta_n$. Si chiede quindi di calcolare la DFT su 10 campioni di $y_n = B^2 (\delta_{n-1} + \delta_{n-9})$.
Dato che la DFT di un impulso unitario nell'origine è una costante unitaria, applicando le regole della traslazione, si ottiene:

$$Y_k = B^2 \left[e^{-j2\pi k/10} + e^{-j2\pi 9k/10} \right] = B^2 \left[e^{-j2\pi k/10} + e^{+j2\pi k/10} \right] = 2B^2 \cos\left(2\pi k/10\right)$$

ESERCIZIO 3

a – Il processo dato è gaussiano bianco con varianza e valor medio unitari. Infatti la potenza di un processo casuale coincide con il suo valore quadratico medio $E\left[x^2\right] = \sigma_x^2 + m_x^2 = 2$.

L'autocorrelazione del processo x_n vale dunque:

$$R_x[m] = \sigma_x^2 \delta_m + m_x^2 = \delta_m + 1$$

L'autocovarianza:

$$C_x[m] = R_x[m] - m_x^2 = \delta_m$$

La densità spettrale di potenza, Tdf dell'autocorrelazione:

$$S_x(\phi) = 1 + \delta(\phi)$$

b - La densità spettrale di potenza di un processo casuale filtrato è dato da:

$$S_y(\phi) = S_x(\phi) \left| H[\phi] \right|^2$$

La risposta in frequenza data è costituita dalla somma di due rettangoli di altezza unitaria con bande rispettivamente $-3/16 < \phi < 1/16$ e $-1/16 < \phi < 3/16$

Dunque $\left| H[\phi] \right|^2$ vale 1 nelle bande $-3/16 < \phi < -1/16$ e $1/16 < \phi < 3/16$, vale 4 nella banda $-1/16 < \phi < 1/16$.

La potenza del processo filtrato è data dall'integrale della sua densità spettrale di potenza:

$$P_y = \int_{-1/2}^{1/2} S_x(\phi) \left| H[\phi] \right|^2 d\phi = \int_{-1/16}^{1/16} 4[1 + \delta(\phi)] d\phi + \int_{-3/16}^{-1/16} d\phi + \int_{1/16}^{3/16} d\phi = \frac{1}{2} + 4 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{19}{4}$$