SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI (Prati)
Appello – 28 Luglio 2017

La prima parte degli esercizi presenta una difficolta' minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficolta' nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficolta'.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova è 2h.

ESERCIZIO 1

Sia dato il sistema LTI con risposta all'impulso $h(t) = -\left[\frac{\sin(\pi B(t-\tau))}{\pi(t-\tau)}\right]^2$

a - Si calcoli l'espressione della risposta in frequenza $H(f)$ del sistema dato e se ne traccino i grafici di modulo e fase.

b - Si calcoli l'uscita $y(t)$ del sistema quando l'ingresso è: $x(t) = \left[\frac{\sin(\pi Bt)}{\pi t}\right] \cdot 2\cos(\pi Bt)$

c - Si calcoli l'energia dell'uscita $y(t)$.

ESERCIZIO 2

Sia dato il segnale continuo $x(t) = 1 + 5\cos\left(2\pi\frac{t}{8} + \frac{\pi}{3}\right)$. Il segnale $x(t)$ viene campionato con frequenza di campionamento $f_s = \frac{3}{16}$ ottenendo il segnale discreto x_n.

a – Il teorema del campionamento è stato rispettato? Perché?

b – Si scrivano le espressioni $\widetilde{X}(f)$ e $\widetilde{X}(\phi)$ della trasformata di Fourier del segnale campionato x_n in frequenza e in frequenza normalizzata.

c – Trovare l'espressione del segnale tempo continuo $y(t)$ ricostruito dai campioni x_n.

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale stazionario continuo $x(t)$ bianco nella banda $-50Hz < f < 50Hz$ con potenza $P_x = 9$ e valor medio $m_x = -2$.

a - Si scriva l'espressione della densità spettrale di potenza $S_x(f)$ del processo casuale.

b – Si calcoli valor medio e autocorrelazione del processo casuale $y(t) = x(t) - x(t - t_o)$.

c – Si calcoli per quali valori di t_o la varianza del processo casuale $y(t)$ è doppia di quella del processo casuale $x(t)$.

SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI (Prati)
Appello – 28 Luglio 2017

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a – L'anti-trasformata di $h(t) = -\left[\frac{\sin(\pi B(t-\tau))}{\pi(t-\tau)}\right]^2$ è:

$$H(f) = -\left[rect\left(\frac{f}{B}\right) * rect\left(\frac{f}{B}\right)\right]e^{-j2\pi f\tau} = \left[rect\left(\frac{f}{B}\right) * rect\left(\frac{f}{B}\right)\right]e^{-j2\pi f\tau}e^{-j\pi}$$

Il modulo è un triangolo isoscele nella banda di frequenze $-B < f < B$ che vale B in $f = 0$.
La fase è un retta di equazione: $\varphi = -2\pi f\tau - \pi$ quindi con pendenza negativa $-2\pi\tau$ che passa per $\pm\pi$ in $f = 0$.

b - La trasformata di Fourier del segnale $x(t) = 2\frac{\sin(\pi Bt)}{\pi t}\cos(\pi Bt)$ è:

$$X(f) = rect\left(\frac{f - B/2}{B}\right) + rect\left(\frac{f + B/2}{B}\right) = rect\left(\frac{f}{2B}\right)$$

La trasformata dell'uscita è dunque $Y(f) = H(f)X(f) = H(f)$ e quindi

$$y(t) = h(t) = -\left[\frac{\sin(\pi B(t-\tau))}{\pi(t-\tau)}\right]^2$$

c - L'energia dell'uscita $y(t)$ è l'integrale del modulo al quadrato della sua trasformata:

$$E_{y(t)} = 2\int_0^B (B-f)^2 df = 2\left[B^3 + \frac{B^3}{3} - 2\frac{B^3}{2}\right] = 2\frac{B^3}{3}$$

ESERCIZIO 2

a - La trasformata di $x(t) = 1 + 5\cos\left(2\pi\frac{t}{8} + \frac{\pi}{3}\right)$ è:

$$X(f) = \delta(f) + \frac{5}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}\delta\left(f - \frac{1}{8}\right) + \frac{5}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}\delta\left(f + \frac{1}{8}\right)$$

La frequenza massima è $\frac{1}{8}$ dunque la frequenza di campionamento minima è $\frac{1}{4}$. Dato che $f_s = \frac{3}{16} < \frac{4}{16}$ il campionamento genera alias in frequenza.

b – Le espressioni della trasformata in frequenza normalizzata e in frequenza si trovano direttamente dalla definizione:

$$\tilde{X}(f) = \frac{3}{16}\left[\delta(f) + \frac{5}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}\delta\left(f + \frac{1}{16}\right) + \frac{5}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}\delta\left(f - \frac{1}{16}\right)\right] \quad \text{(periodicità } f_s = \frac{3}{16}\text{)}$$

Passando alla frequenza normalizzata $f_s\phi = f$, si ottiene

$$\begin{aligned}\tilde{X}(\phi) &= \frac{3}{16}\left[\delta(f_s\phi) + \frac{5}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}\delta\left(f_s\phi + \frac{1}{16}\right) + \frac{5}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}\delta\left(f_s\phi - \frac{1}{16}\right)\right] \\ &= \delta(\phi) + \frac{5}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}\delta\left(\phi + \frac{1}{3}\right) + \frac{5}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}\delta\left(\phi - \frac{1}{3}\right)\end{aligned} \quad \text{(periodicità 1)}$$

c – Il segnale tempo continuo ricostruito da x_n può calcolarsi agevolmente nel dominio delle frequenze applicando a $\tilde{X}(f)$ il filtro di ricostruzione $H_R(f) = \frac{1}{f_s}rect\left(\frac{f}{f_s}\right) = \frac{16}{3}rect\left(\frac{16f}{3}\right)$

$$Y(f) = \tilde{X}(f)H_R(f) = \left[\delta(f) + \frac{5}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}\delta\left(f + \frac{1}{16}\right) + \frac{5}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}\delta\left(f - \frac{1}{16}\right)\right]$$

da cui

$$y(t) = 1 + 5\cos\left(2\pi\frac{t}{16} - \frac{\pi}{3}\right)$$

ESERCIZIO 3

a – La densità spettrale di potenza di un processo continuo, bianco in una banda limitata B ha la seguente espressione generale:

$$S_x(f) = \frac{\sigma_x^2}{B} \cdot rect\left(\frac{f}{B}\right) + m_x^2 \delta(f)$$

in base ai dati forniti da problema

$$S_x(f) = \frac{5}{100} \cdot rect\left(\frac{f}{100}\right) + 4\delta(f)$$

b – Valor medio e autocorrelazione del processo $y(t) = x(t) - x(t - t_o)$ si calcolano agevolmente dalla definizione:

$$m_y = E[x(t) - x(t - t_o)] = E[x(t)] - E[x(t - t_o)] = 0$$

$$R_y(\tau) = E[y(t+\tau) \cdot y^*(t)] = E\left[(x(t+\tau) - x(t - t_o + \tau)) \cdot (x(t) - x(t - t_o))^*\right] =$$

$$= 2E[x(t+\tau) \cdot x^*(t)] - E[x(t+\tau) x^*(t - t_o)] - E[x(t - t_o + \tau) x^*(t)] =$$

$$= 2R_x(\tau) - R_x(\tau + t_o) - R_x(\tau - t_o)$$

L'autocorrelazione $R_x(\tau) = \frac{1}{20} \frac{\sin \pi 100\tau}{\pi\tau} + 4$

Dunque:

$$R_y(\tau) = \frac{1}{10} \frac{\sin \pi 100\tau}{\pi\tau} - \frac{1}{20} \frac{\sin \pi 100(\tau + t_o)}{\pi(\tau + t_o)} - \frac{1}{20} \frac{\sin \pi 100(\tau - t_o)}{\pi(\tau - t_o)}$$

Un modo alternativo di procedere consiste nello scrivere $y(t) = x(t) * \{\delta(t) - \delta(t - t_o)\}$ e quindi applicare le formule per il calcolo di valor medio e autocorrelazione di un processo che passa attraverso un sistema LTI.

c – Dato che il valor medio $m_y = 0$, la varianza $\sigma_y^2 = R_y[0]$ e dunque:

$\sigma_y^2 = R_y(0) = 10 - \frac{1}{10} \frac{\sin \pi 100 t_o}{\pi t_o}$ che vale il doppio di $\sigma_x^2 = 5$ quando $t_o = \frac{k}{100}$ cioè quando $x(t)$ e $x(t - t_o)$ sono incorrelati.