SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI secondo appello – 27 Luglio 2015

Il tempo massimo per lo svolgimento della prova è 2h.

ESERCIZIO 1

Sia dato un sistema LTI con risposta all'impulso $h(t) = 1 - \left|\frac{t-T}{T}\right| \quad 0 \le t \le 2T$ e nullo altrove.

a - Si calcoli l'espressione della risposta in frequenza *H(f)*.

b- Si calcoli l'uscita *y(t)* e la sua potenza quando all'ingresso del sistema si pone il segnale

$$x(t) = \cos\left\{\pi \frac{(t-T)}{T}\right\} + 2\sin\left\{6\pi \frac{(t-3T)}{T} + \varphi\right\} - 3\cos\left\{18\pi \frac{(t+6T)}{T} - 3\varphi\right\}$$

ESERCIZIO 2

Il segnale discreto x_n ha la seguente trasformata di Fourier: $\tilde{X}(f) = 60 \sum_{k=-\infty}^{\infty} rect\left(\frac{f+12k-5}{10}\right)$

a - Si ricavi l'espressione del segnale tempo continuo $x(t)$ dal quale è stato ottenuto il segnale discreto x_n.

b - La soluzione al primo quesito è unica o ne esiste più di una? E nel caso, quante? Spiegare sinteticamente.

(suggerimento: procedendo nel dominio della frequenza si disegni il grafico di $\tilde{X}(f)$ *e si ragioni sull'effetto in frequenza del campionamento nel tempo)*

ESERCIZIO 3

La potenza del processo casuale stazionario *x(t)*, con valor medio 10, vale 500. Il coefficiente di correlazione del processo casuale vale $\rho_x(\tau) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\tau\right) \cdot [rect(\tau) * rect(\tau)]$.

a - Si scriva l'espressione della densità spettrale di potenza del processo casuale *x(t)*.

b - Il processo casuale viene campionato con frequenza di campionamento $f_s = 2$ generando il processo casuale discreto x_n. Quanto vale la varianza della differenza di 2 campioni a distanza 2 di x_n (ad es. $x_1 + x_3$)? E la varianza della differenza di 2 campioni consecutivi di x_n (ad es. $x_1 + x_2$)?

c (*facoltativo*) - Sarebbe possibile per un processo casuale tempo continuo avere un coefficiente di correlazione del tipo $\rho_x(\tau) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\tau\right) \cdot rect\left(\frac{\tau}{2}\right)$?

SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI secondo appello – 27 Luglio 2015

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a – La risposta all'impulso data e' formata dalla convoluzione di due rettangoli di ampiezza $\sqrt{\frac{1}{T}}$ tra 0 e T. La risposta in frequenza ha la seguente espressione:

$$H(f) = \frac{1}{T}\left(\frac{\sin \pi f T}{\pi f}\right)^2 \exp\{-j2\pi T f\}$$

Gli zeri di questa funzione si trovano alle frequenze $\frac{k}{T}$

b - La trasformata di Fourier dell'ingresso vale:

$$X(f) = \left[\frac{1}{2}\delta\left(f - \frac{1}{2T}\right) + \frac{1}{2}\delta\left(f + \frac{1}{2T}\right)\right]\exp\{-j2\pi T f\} + \dots$$

Tutti gli altri termini hanno soltanto componenti alle frequenze $\frac{k}{T}$ e quindi sono cancellati nella moltiplicazione con la risposta in frequenza.

La trasformata dell'uscita vale dunque:

$$Y(f) = X(f)H(f) = \left[\frac{1}{2}\delta\left(f - \frac{1}{2T}\right) + \frac{1}{2}\delta\left(f + \frac{1}{2T}\right)\right]\exp\{-j2\pi T f\} \cdot \frac{1}{T}\left(\frac{\sin \pi f T}{\pi f}\right)^2 \exp\{-j2\pi T f\} =$$

$$= \frac{1}{2T}\left(\frac{\sin \pi/2}{\pi/2T}\right)^2 \exp\{-j\pi\}\delta\left(f - \frac{1}{2T}\right) + \frac{1}{2T}\left(\frac{\sin \pi/2}{\pi/2T}\right)^2 \exp\{+j\pi\}\delta\left(f + \frac{1}{2T}\right) =$$

$$= -2T\left(\frac{1}{\pi}\right)^2\left[\delta\left(f - \frac{1}{2T}\right) + \delta\left(f + \frac{1}{2T}\right)\right]$$

L'uscita ha la seguente espressione:

$$y(t) = -\frac{4T}{\pi^2}\cos\left(\pi \frac{t}{T}\right)$$

e la potenza dell'uscita vale $\frac{8T^2}{\pi^4}$

ESERCIZIO 2

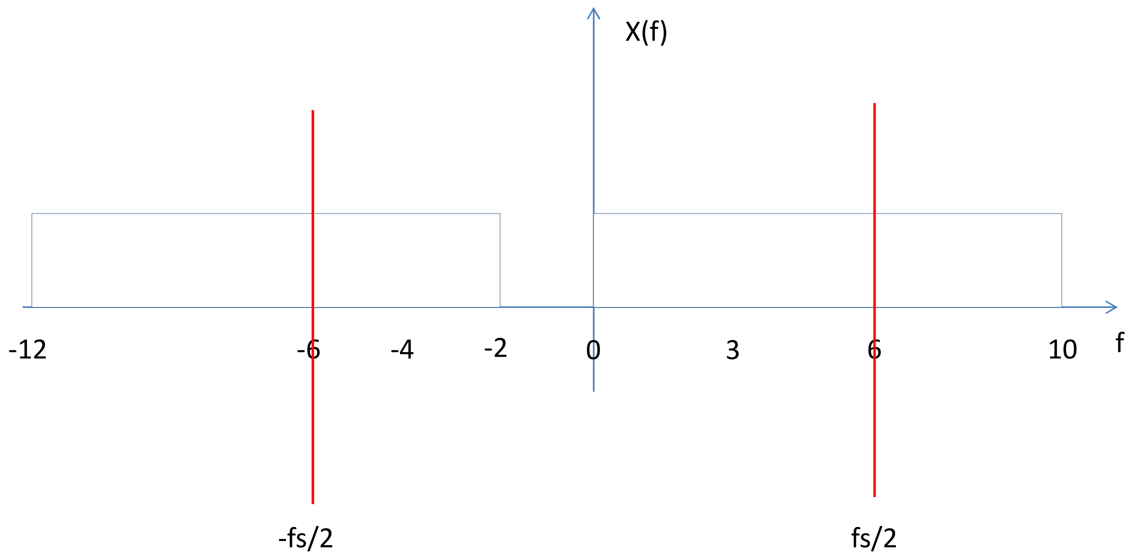
a – La trasformata $\tilde{X}(f)$ del segnale discreto ha periodicità $f_s = 12$. Questa si ottiene periodicizzando a passo $f_s = 12$ la trasformata del segnale continuo $X(f)$.

Per convenzione si assume che $X(f)$ sia la replica spettrale che si trova nella banda $-\frac{f_s}{2} < f < \frac{f_s}{2}$ divisa per 12:

$$X(f) = 5rect\left(\frac{f-3}{6}\right) + 5rect\left(\frac{f+4}{4}\right)$$

Da qui l'espressione del segnale continuo che ha originato quello discreto:

$$x(t) = 5\frac{\sin 6\pi t}{\pi t}\exp\{j6\pi t\} + 5\frac{\sin 4\pi t}{\pi t}\exp\{-j8\pi t\}$$



b – Come per qualsiasi segnale campionato le soluzioni sono in realtà infinite. La soluzione ricavata al punto precedente è quella che convenzionalmente si assume come soluzione standard.
Tuttavia la stessa trasformata $\tilde{X}(f)$ si può ottenere replicando a passo 12Hz una sua banda larga 12HZ posizionata intorno a qualsiasi frequenza portante f_o.

Per esempio la trasformata $\tilde{X}(f)$ del segnale discreto si può ottenere periodicizzando a passo $f_s = 12$ la trasformata del segnale continuo

$$X(f) = 5rect\left(\frac{f-5}{10}\right)$$

Da qui l'espressione di un altro segnale continuo che ha originato lo stesso segnale discreto:

$$x(t) = 5\frac{\sin 10\pi t}{\pi t}\exp\{j10\pi t\}$$

ESERCIZIO 3

a – L'autocorrelazione ha la seguente espressione:

$$R_x(\tau) = \sigma_x^2 \rho_x(\tau) + m_x^2 = 400\cos\left(\frac{\pi}{2}\tau\right) \cdot [rect(\tau) * rect(\tau)] + 100$$

La densità spettrale di potenza vale

$$S_y(f) = 100\delta(f) + 200\left(\frac{\sin\left(\pi\left(f - \frac{1}{4}\right)\right)}{\pi\left(f - \frac{1}{4}\right)}\right)^2 + 200\left(\frac{\sin\left(\pi\left(f + \frac{1}{4}\right)\right)}{\pi\left(f + \frac{1}{4}\right)}\right)^2$$

b - Il valor medio e la varianza del processo campionato sono uguali a quelli del processo tempo continuo.
L'autocorrelazione del processo discreto si ottiene campionando quella del processo tempo continuo:

$$R_x[m] = 400\delta_m + 100\sqrt{2}\delta_{m-1} + 100\sqrt{2}\delta_{m+1} + 100$$

Campioni a distanza maggiore o uguale a 2 sono tra di loro incorrelati e la varianza della loro DIFFERENZA è uguale alla **SOMMA** delle varianze.

$$\sigma_{x_1 - x_3}^2 = 2\sigma_x^2 = 800$$

Invece:

$$\sigma_{x_1 - x_2}^2 = E\left[x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2\right] - m_{x_1 - x_2}^2$$

Essendo il valor medio della differenza nullo (il processo è stazionario), la varianza risulta essere:

$$\sigma_{x_1 - x_2}^2 = 2R_x[0] - 2R_x[1] = 1000 - 200\sqrt{2} - 200 = 800 - 200\sqrt{2}$$

c (*facoltativo*) - Non è possibile per un processo casuale tempo continuo avere un coefficiente di correlazione del tipo $\rho_x(\tau) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\tau\right) \cdot rect\left(\frac{\tau}{2}\right)$ perché la trasformata di Fourier dell'autocorrelazione presenterebbe lobi negativi. Questo non può essere perché la trasformata di Fourier dell'autocorrelazione è la densità spettrale di potenza del processo che è reale e positiva a tutte le frequenze.