TELECOMUNICAZIONI secondo appello - 26 Luglio 2013

La prima parte degli esercizi presenta una difficolta' minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficolta' nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficolta'.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova e' 2h e 15min.
I punteggi indicano il peso relativo dell'esercizio.

ESERCIZIO 1

Sia dato un sistema LTI con risposta all'impulso $h(t) = \frac{\sin(20\pi t)\sin(10\pi t)}{\pi t}$.

a [6/30]- Si tracci il grafico della risposta in frequenza *H(f)*

b [6/30]- All'ingresso del sistema dato si pone il segnale $x(t) = \frac{\sin(14\pi t)}{\pi t}$.

Si calcoli l'espressione dell'uscita *y(t)* e relativa energia e potenza.

ESERCIZIO 2

Si consideri il segnale $x(t) = \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$

a [6/30]- Si tracci il grafico della trasformata di Fourier di *x(t)*.

b [4/30]**-** Si calcoli trasformata di Fourier in frequenza normalizzata di $x_n = x\left(\frac{n}{4}\right)$.

c [4/30]**-** Si calcoli la DFT di x_n con $0 \le n \le 59$

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale stazionario discreto x_n la cui densità di probabilità delle ampiezze $p_x(a) = ka^2$ tra 0 e 1 e nulla altrove. I campioni del processo sono tra loro indipendenti.

a [6/30]- Si scriva l'espressione della densità spettrale di potenza $S_x(\phi)$.

b [4/30]– I campioni del processo casuale x_n vengono elaborati da due sistemi LTI indipendenti. Il primo esegue la differenza di 2 campioni consecutivi di x_n mentre il secondo esegue la somma di tre campioni consecutitivi di x_n. L'uscita dei due sistemi viene poi sommata per generare il processo casuale y_n. Si calcoli l'autocorrelazione di y_n.

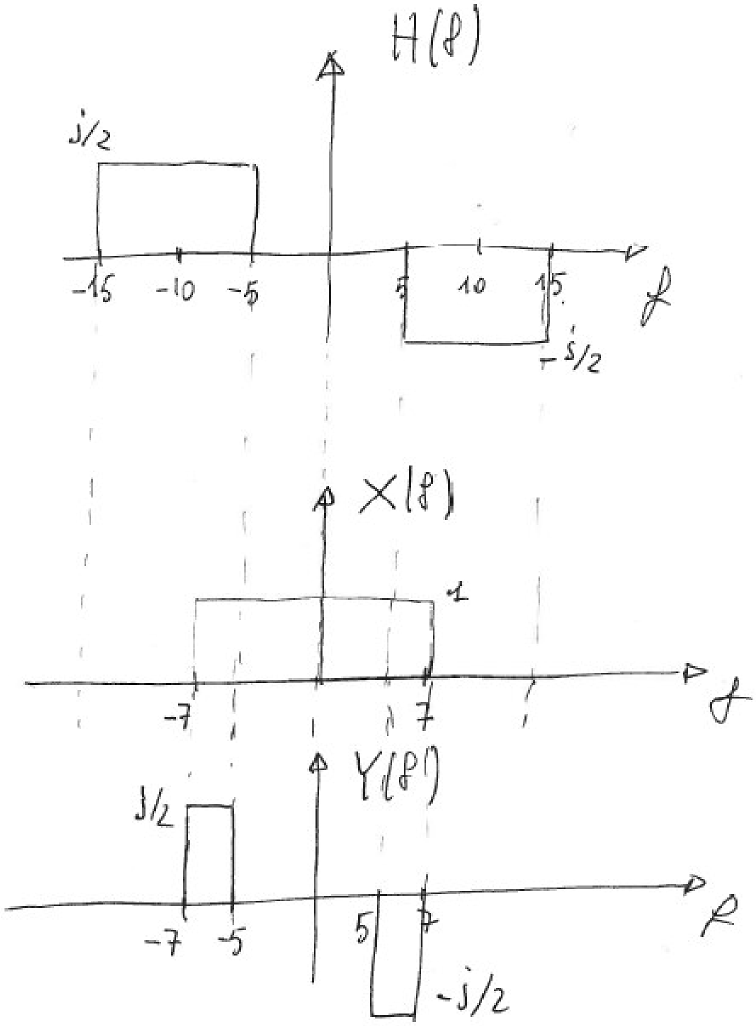
TELECOMUNICAZIONI secondo appello - 26 Luglio 2013

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a)

b)



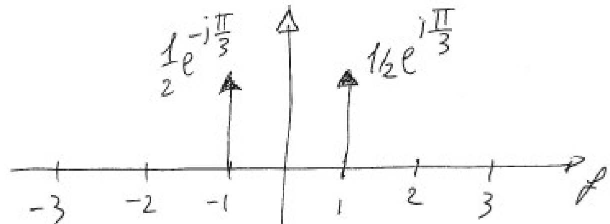
$$y(t) = \frac{j}{2}\frac{\sin 2\pi t}{\pi t}e^{-j2\pi\cdot 6\cdot t} - \frac{j}{2}\frac{\sin 2\pi t}{\pi t}e^{j2\pi 6 t} =$$

$$= \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}\cdot \sin 12\pi t$$

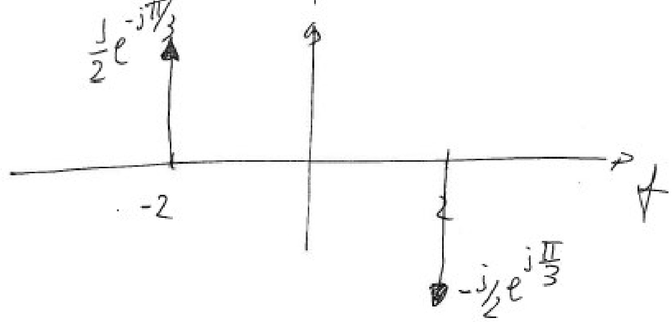
$$E_{y(t)} = \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot 2 = 1 \qquad P_{y(t)} = 0$$

ESERCIZIO 2

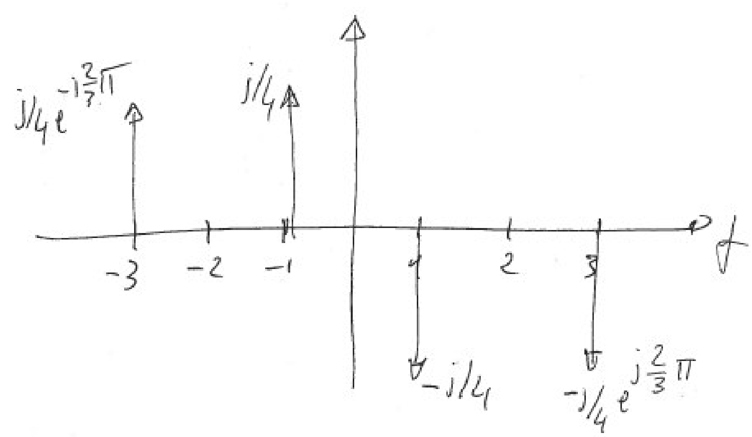
a) $\cos\left(2\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$



$\sin\left(4\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$



$\cos\left(2\pi t+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(4\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$



b – Si campiona $x(t)$ con $T=\frac{1}{4}$. La trasformata $X(f)$ viene moltiplicata per 4 e periodicizzata a passo 4. Occorre considerare tutto cio' che viene replicato nella banda tra -2 e 2 Hz. Troviamo:

$$\tilde{X}(f)=4\left(\frac{j}{4}e^{-j\frac{2\pi}{3}}-\frac{j}{4}\right)\delta(f-1)+4\left(\frac{j}{4}-\frac{j}{4}e^{j\frac{2\pi}{3}}\right)\delta(f+1)=$$

$$=j\left(e^{-j\frac{2\pi}{3}}-1\right)\delta(f-1)+j\left(1-e^{j\frac{2\pi}{3}}\right)\delta(f+1)$$

Passando alla frequenza normalizzata:

$$\tilde{X}(\phi)=\frac{j}{4}\left(e^{-j\frac{2\pi}{3}}-1\right)\delta\left(\phi-\frac{1}{4}\right)+\frac{j}{4}\left(1-e^{j\frac{2\pi}{3}}\right)\delta\left(\phi+\frac{1}{4}\right)$$

c – Il risultato ottenuto al punto precedente mostra che a valle del campionamento si e' ottenuta una sinusoide di frequenza normalizzata ¼ cioe' di periodo 4. In 60 campioni ci sono esattamente 15 cicli della sinusoide. Quindi:

$$X_k = j15\left(e^{-j\frac{2\pi}{3}}-1\right)\delta_{k-15} + j15\left(1-e^{j\frac{2\pi}{3}}\right)\delta_{k-45}$$

ESERCIZIO 3

a – I campioni del processo sono tra loro indipendenti quindi la funzione di autocorrelazione ha la seguente forma generale:

$$R_x[m]=\sigma_x^2\delta_m+|m_x|^2$$

Dalla densità di probabilità delle ampiezze, che vale $p_x(a)=3a^2$, si ricava che:

$$m_x=\int_0^1 ap_x(a)da=3\int_0^1 a^3da=\frac{3}{4}$$

$$\sigma_x^2=\int_0^1 a^2p_x(a)da-|m_x|^2=3\int_0^1 a^4da-\frac{9}{16}=\frac{3}{5}-\frac{9}{16}=\frac{3}{80}$$

La densità spettrale di potenza è la trasformata di Fourier dell'autocorrelazione diventa:

$$S_x(\phi)=\frac{3}{80}rect(\phi)+\frac{9}{16}\delta(\phi)$$

b - Si nota che:

$$y_n=(x_n-x_{n-1})+(x_n+x_{n-1}+x_{n-2})=2x_n+x_{n-2}$$

L'autocorrelazione dell'uscita di questo sistema LTI vale:

$$R_y[m]=R_x[m]*h_m*h_{-m}=\left(\frac{3}{80}\delta_m+\frac{9}{16}\right)*(5\delta_m+2\delta_{m-2}+2\delta_{m+2})=\frac{3}{16}\delta_m+\frac{3}{40}\delta_{m-2}+\frac{3}{40}\delta_{m+2}+\frac{81}{16}.$$