SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI (Prati)
SECONDO APPELLO – 25 Luglio 2011

La prima parte degli esercizi presenta una difficolta' minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficolta' nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficolta'.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova e' 2h e 15min.

ESERCIZIO 1

Sia dato un sistema LTI con risposta in frequenza $H(f) = \left[rect\left(f - \frac{1}{2} \right) * rect\left(f + \frac{1}{2} \right) \right]$.

a - Si traccino i grafici di modulo e fase della risposta in frequenza $H(f)$.

b - Si calcoli l'uscita del sistema all'ingresso $x(t) = \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}(t+1) \right) \right]^2$.

ESERCIZIO 2

Sia dato il segnale tempo continuo $x(t) = \frac{\sin(2\pi Bt)}{\pi t} \cos(\pi Bt)$.

a - Si calcoli la minima frequenza di campionamento f_s per evitare alias in frequenza.

b – Il segnale dato viene campionato idealmente ($x_c(t)$) con frequenza di campionamento $f_s = \frac{5}{2}B$. Si tracci il grafico della trasformata di Fourier $X_c(f)$ del segnale campionato.

c – Si trovi l'espressione del segnale $y(t)$ ottenuto filtrando il segnale campionato idealmente $x_c(t)$ con un filtro passa-basso ideale di ampiezza $\frac{2}{5B}$ nella banda $-B < f < B$. (*Suggerimento: un modo semplice di risolvere il problema è quello di vedere la trasformata del segnale* $y(t)$ *come somma di 2 trasformate note ...*)

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale discreto stazionario x_n , gaussiano con potenza 17, valor medio $m_x = -1$ e coefficiente di correlazione $\rho_x[m] = \delta_m + \frac{1}{2}\delta_{m-1} + \frac{1}{2}\delta_{m+1}$.

a - Si calcoli l'espressione dell'autocorrelazione del processo x_n .

b – Il processo x_n viene filtrato con un sistema Lineare Tempo Invariante con risposta all'impulso $h_n = \delta_n - \delta_{n-1}$. Si calcoli la potenza del processo filtrato.

TELECOMUNICAZIONI Secondo Apello (Prati) – 25 Luglio 2011

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a – La risposta in frequenza ha modulo triangolare da -1 a 1 (altezza 1 a *f=0*) e fase nulla.
b - La trasformata di Fourier del segnale $x(t)$ è formata da 3 impulsi:

$$X(f)=\left\{\frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{4}\delta\left(f-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\delta\left(f+\frac{1}{4}\right)\right\}\exp\{j2\pi f\}=$$
$$=\frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{4}\exp\left\{j\frac{\pi}{2}\right\}\delta\left(f-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\exp\left\{-j\frac{\pi}{2}\right\}\delta\left(f+\frac{1}{4}\right)$$

La tarsformata di Fourier dell'uscita e' dunque:

$$Y(f)=\frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\exp\left\{j\frac{\pi}{2}\right\}\delta\left(f-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\exp\left\{-j\frac{\pi}{2}\right\}\delta\left(f+\frac{1}{4}\right)$$

L'espressione dell'uscita è:

$$y(t)=\frac{1}{2}+\frac{3}{16}\exp\left\{j\frac{\pi}{2}\right\}\exp\left\{j2\pi\frac{1}{4}t\right\}+\frac{3}{16}\exp\left\{-j\frac{\pi}{2}\right\}\exp\left\{-j2\pi\frac{1}{4}t\right\}=$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{16}\exp\left\{j\frac{\pi}{2}(t+1)\right\}+\frac{3}{16}\exp\left\{-j\frac{\pi}{2}(t+1)\right\}=\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\cos\left\{\frac{\pi}{2}(t+1)\right\}$$

ESERCIZIO 2

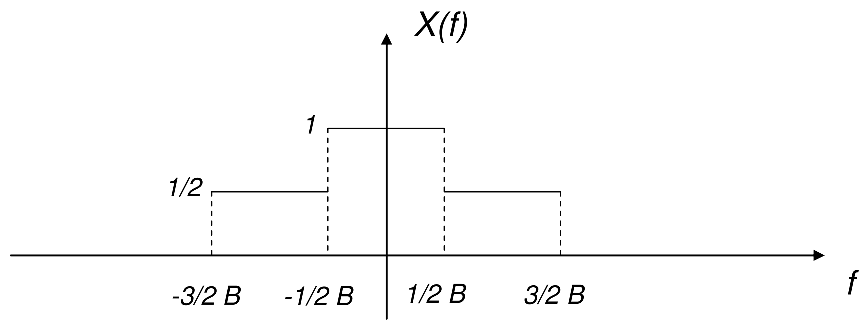
a - La trasformata di Fourier del segnale $x(t)=\dfrac{\sin(2\pi Bt)}{\pi t}\cos(\pi Bt)$ e' data da

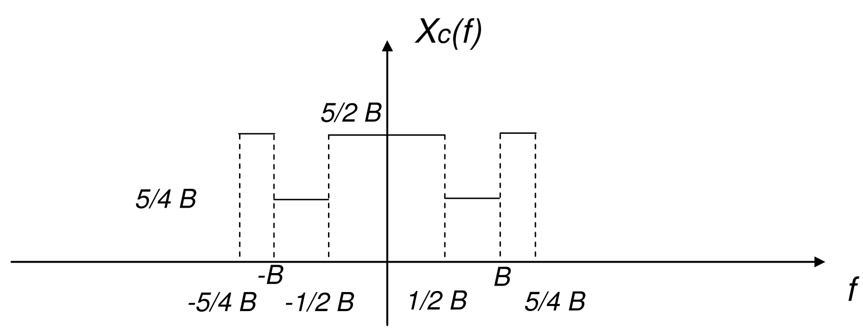
$$X(f)=rect\left(\frac{f}{2B}\right)*\left[\frac{1}{2}\delta\left(f-\frac{B}{2}\right)+\frac{1}{2}\delta\left(f+\frac{B}{2}\right)\right]$$

La massima frequenza del segnale è $\frac{3}{2}B$, quindi la minima frequenza di campionamento per evitare alias in frequenza è $3B$.

b – La frequenza di campionamento utilizzata è $\frac{5}{2}B$ e l'intervallo di campionamento è $T = \frac{2}{5B}$. La trasformata di Fourier del segnale campionato si ottiene tramite la nota formula:

$$X_c(f) = \frac{1}{T}\sum_k X\left(f - \frac{k}{T}\right) = \frac{5B}{2}\sum_k X\left(f - \frac{5kB}{2}\right)$$





c – Filtrando il segnale campionato idealmente $x_c(t)$ con un filtro passa-basso ideale di ampiezza $\frac{2}{5B}$ nella banda $-B < f < B$, si ottiene una trasformata di Fourier formata dalla somma di 2 rettangoli di ampiezza ½ e bande rispettivamente *B* e *2B*.

Dunque:

$$y(t) = \frac{1}{2}\frac{\sin(2\pi Bt)}{\pi t} + \frac{1}{2}\frac{\sin(\pi Bt)}{\pi t}$$

ESERCIZIO 3

a – Dai dati del problema:

$$\sigma_x^2 = P_x - |m_x|^2 = 16$$

$$C_x[m] = \sigma_x^2 \rho_x[m] = 16\left[\delta_m + \frac{1}{2}\delta_{m-1} + \frac{1}{2}\delta_{m+1}\right]$$

$$R_x[m] = C_x[m] + |m_x|^2 = 16\left[\delta_m + \frac{1}{2}\delta_{m-1} + \frac{1}{2}\delta_{m+1}\right] + 1$$

b - L'autocorrelazione dell'uscita è data da:

$$R_y[m] = R_x[m] * h_m * h_{-m} = \left\{16\left[\delta_m + \frac{1}{2}\delta_{m-1} + \frac{1}{2}\delta_{m+1}\right] + 1\right\} * \left(2\delta_m - \delta_{m-1} - \delta_{m+1}\right)$$

La potenza dell'uscita è data da:

$$P_y = R_y[0] = 16$$