SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI (Prati)
appello del 24 Luglio 2012

La prima parte degli esercizi presenta una difficolta' minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficolta' nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficolta'.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova e' 2h e 00min.

ESERCIZIO 1

Si consideri il segnale $x(t)=\frac{\sin \pi B(t-\tau)}{\pi(t-\tau)}\cos^2(2\pi f_o t)$

a [6] - Si calcoli l'espressione della sua trasformata di Fourier.

b [6] - Si calcoli il valore della sua energia quando $\tau = 0$ e $f_o > \frac{B}{4}$.

ESERCIZIO 2

Sia dato il segnale tempo continuo $x(t)=10-\frac{\sin^2(\pi Bt)}{(\pi Bt)^2}$ che viene campionato con frequenza di campionamento $f_s = B$.

a [5] – Si tracci il grafico della trasformata di Fourier del segnale campionato x_n.

b [3] –Si trovi l'espressione del segnale tempo continuo ricostruito da x_n.

c [2] – Si calcoli la DFT dei primi 100 campioni di x_n ($0 \le n \le 99$).

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale gaussiano stazionario $x(t)$ con valor medio unitario e varianza $\sigma_x^2 = 2$, bianco nella banda ± 100 Hz . Il processo $x(t)$ viene campionato con frequenza di campionamento $f_s = 400$ Hz, ottenendo il processo discreto x_n.

a [6] – Si scrivano le espressioni dell'autocorrelazione e del coefficiente di correlazione del processo discreto x_n.

b [6] – Si calcoli l'autocovarianza e la densità spettrale di potenza del processo $y_n = x_n + x_{n-1}$.

TELECOMUNICAZIONI appello del 24 Luglio 2012

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a – La trasformata di Fourier di $x(t) = \frac{\sin \pi B(t-\tau)}{\pi(t-\tau)} \cos^2(2\pi f_o t)$ è data da:

$$X(f) = \frac{1}{2} rect\left(\frac{f}{B}\right) \exp\{-j2\pi f\tau\} + \frac{1}{4} rect\left(\frac{f-2f_o}{B}\right) \exp\{-j2\pi(f-2f_o)\tau\} + \frac{1}{4} rect\left(\frac{f+2f_o}{B}\right) \exp\{-j2\pi(f+2f_o)\tau\}$$

b - Il valore dell'energia di $x(t)$ in funzione di B e f_o quando $\tau = 0$ vale:

$$E_{x(t)} = \begin{cases} \frac{3}{8}B & f_o > \frac{B}{2} \\ \frac{7}{8}B - f_o & \frac{B}{4} < f_o \le \frac{B}{2} \end{cases}$$

ESERCIZIO 2

a - La trasformata di Fourier del segnale dato è formata da un impulso di area 10 a $f = 0$ e da un triangolo di banda $-B < f < B$ e altezza $-\frac{1}{B}$. Campionando il segnale con $f_s = B$, la sua trasformata viene replicata a passo $f_s = B$ e moltioplicata per $f_s = B$. Quindi, a causa dell'alias in frequenza la trasformata del segnale campionato diventa:

$X(f) = 10B\delta(f) - rect\left(\frac{f}{B}\right)$ periodica di periodo $f_s = B$.

b – Il segnale tempo continuo ricostruito da quello campionata ha la seguente espressione:

$$x_R(t) = 10 - \frac{\sin \pi Bt}{\pi Bt}$$

c – Il segnale campionato ha la seguente espressione:

$$x_n = 10 - \delta_n$$

La DFT dei primi 100 campioni ha dunque la seguente espressione:

$$X_k = 1000\delta_k - 1$$

ESERCIZIO 3

a – Dai dati del problema la densità spettrale di potenza del processo dato è:

$$S_x(f) = \frac{1}{100} rect\left(\frac{f}{200}\right) + \delta(f)$$

L'autocorrelazione del processo vale:

$$R_x(\tau) = \frac{\sin \pi 200\tau}{\pi 100\tau} + 1$$

A seguito del campionamento l'autocorrelazione vale:

$$R_x[m] = \frac{\sin \pi \frac{200}{f_s} m}{\pi \frac{100}{f_s} m} + 1 = \frac{\sin \pi \frac{m}{2}}{\pi \frac{m}{4}} + 1$$

Il coefficiente di correlazione del processo è:

$$\rho_x[m] = \frac{C_x[m]}{\sigma_x^2} = \frac{\sin \pi \frac{m}{2}}{\pi \frac{m}{2}}$$

b - Per definizione l'autocorrelazione del processo è:

$$R_y[m] = E[y_{n+m}y_n] = E[(x_{n+m} + x_{n+m-1})(x_n + x_{n-1})] = 2R_x[m] + R_x[m-1] + R_x[m+1] =$$
$$= 2\frac{\sin\pi\frac{m}{2}}{\pi\frac{m}{4}} + \frac{\sin\pi\frac{(m-1)}{2}}{\pi\frac{(m-1)}{4}} + \frac{\sin\pi\frac{(m+1)}{2}}{\pi\frac{(m+1)}{4}} + 4$$

Inoltre $m_y = 2m_x = 2$ e quindi

$$C_y[m] = 2\frac{\sin\pi\frac{m}{2}}{\pi\frac{m}{4}} + \frac{\sin\pi\frac{(m-1)}{2}}{\pi\frac{(m-1)}{4}} + \frac{\sin\pi\frac{(m+1)}{2}}{\pi\frac{(m+1)}{4}}$$

La densità spettrale di potenza può essere calcolata come trasformata dell'autocorrelazione appena trovata oppure utilizzando la nota formula $S_y(f) = S_x(f)|H(f)|^2$.

<u>Primo metodo</u>:

La trasformata di Fourier di $\frac{\sin\pi\frac{m}{2}}{\pi m}$ è $rect(2\phi)$, quindi la trasformata dell'autorrelazione ha la seguente espressione:

$$S_y(\phi) = 8rect(2\phi) + 4rect(2\phi)\exp\{-j2\pi\phi\} + 4rect(2\phi)\exp\{j2\pi\phi\} + 4\delta(\phi) =$$
$$= 8rect(2\phi)[1 + \cos(2\pi\phi)] + 4\delta(\phi)$$

<u>Secondo medtodo</u>:

$$S_y(f) = S_x(f)|H(f)|^2 = \left[4rect\left(\frac{f}{200}\right) + 400\delta(f)\right] \cdot 2\left(1 + \cos\left(2\pi\frac{f}{400}\right)\right) =$$
$$= 1600\delta(f) + 8\left(1 + \cos\left(2\pi\frac{f}{400}\right)\right)rect\left(\frac{f}{200}\right)$$

periodica di periodo 400

$$S_y(\phi) = S_x(\phi)|H(\phi)|^2 = [4rect(2\phi) + \delta(\phi)] \cdot 2(1 + \cos(2\pi\phi)) =$$
$$= 8rect(2\phi)[1 + \cos(2\pi\phi)] + 4\delta(\phi)$$

periodica di periodo 1