TELECOMUNICAZIONI secondo appello - 23 Luglio 2009

La prima parte degli esercizi presenta una difficolta' minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficolta' nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficolta'.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova e' 2h e 15min.

ESERCIZIO 1

Sia dato un sistema LTI con risposta all'impulso $h(t) = 2\delta(t) - \delta(t-\tau)$

a - Si tracci il grafico del modulo della risposta in frequenza $H(f)$.

b - All'ingresso del sistema dato si pone il segnale $x(t) = \cos^2(2\pi f_o t)$. Si calcoli la trasformata di Fourier del segnale d'ingresso.

c - Si calcoli il valore della frequenza f_o del segnale $x(t) = \cos^2(2\pi f_o t)$ tale da minimizzare la potenza del segnale in uscita dal sistema dato.

ESERCIZIO 2

Sia dato il processo casuale gaussiano tempo continuo $x(t)$ con valor medio unitario e con densita' spettrale di potenza $S_x(f) = \delta(f) + rect\left(\frac{f}{10}\right)$.

a - Si calcoli la potenza del processo casuale, la sua funzione di autocorrelazione e la sua varianza.

b – Il processo dato viene campionato con intervallo di campionamento T=0.1 secondi generando il processo casuale discreto x_n. Si tracci il grafico della densita' spettrale di potenza del processo casuale discreto x_n sia in frequenza *f* che in frequenza normalizzata ϕ.

c - Si calcoli la DFT dei primi 10 campioni dell'autocorrelazione del processo casuale discreto x_n.

d – Il processo casuale discreto viene filtrato con la risposta all'impulso $h_n = -\frac{1}{4}\delta_{n+1} + \delta_n - \frac{1}{4}\delta_{n-1}$.
Si calcoli l'autocorrelazione e il valor medio dell'uscita.

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale discreto, stazionario e bianco x_n. La distribuzione delle ampiezze e' uniforme tra -4 e 4. I campioni di x_n vengono quantizzati nel modo seguente: ai valori negativi viene assegnato un unico livello di quantizzazione, mentre quelli positivi vengono quantizzati uniformemente con 4 livelli.

a - Si calcoli l'espressione dell'entropia della sorgente numerica.
b - Si calcoli la potenza dell'errore di quantizzazione.

TELECOMUNICAZIONI secondo appello - 23 Luglio 2009

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

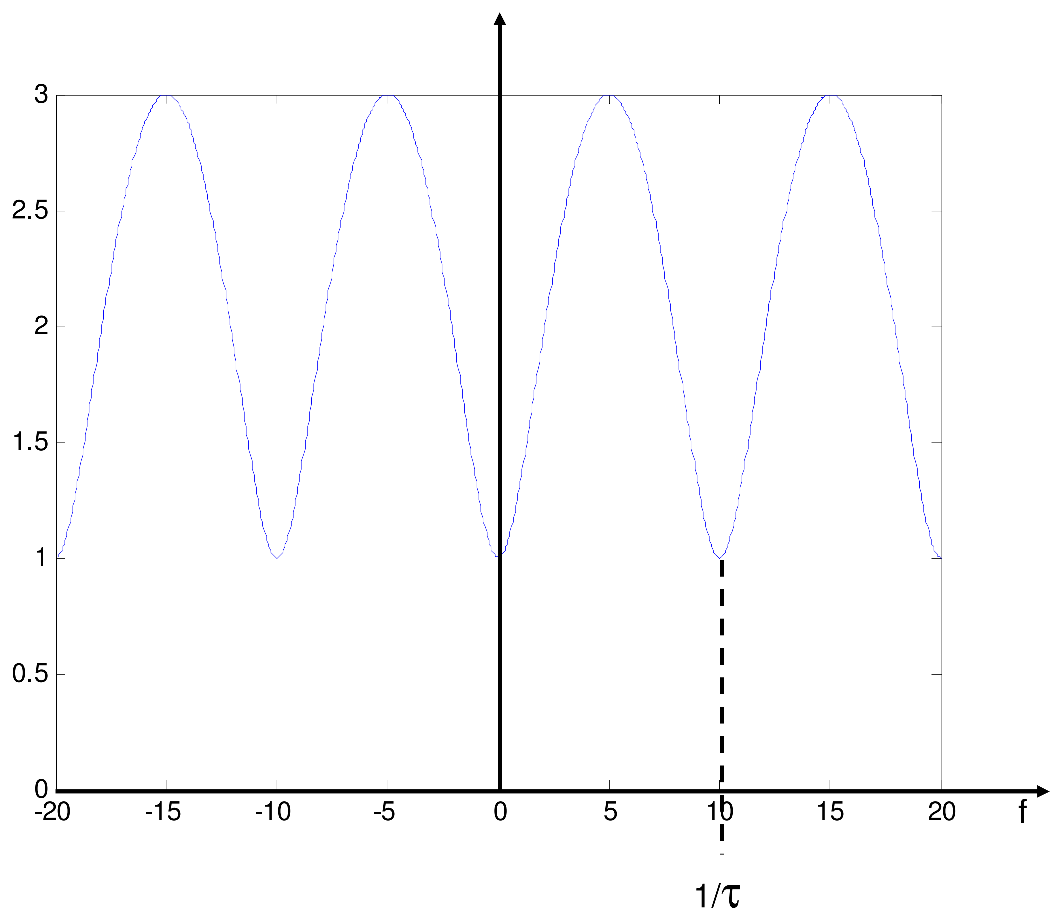
a – La risposta in frequenza e' $H(f) = 2 - \exp\{-j2\pi f\tau\}$. Il modulo vale:

$$|H(f)| = \sqrt{[2 - \exp\{-j2\pi f\tau\}][2 - \exp\{+j2\pi f\tau\}]} = \sqrt{5 - 4\cos(2\pi f\tau)}$$

Oppure:

$$|H(f)| = \sqrt{[2 - \cos(2\pi f\tau)]^2 + \sin^2(2\pi f\tau)} = \sqrt{4 + \cos^2(2\pi f\tau) + \sin^2(2\pi f\tau) - 4\cos(2\pi f\tau)} = \sqrt{5 - 4\cos(2\pi f\tau)}$$

Da cui il grafico del modulo di *H(f):*



b – Il segnale $x(t)=\cos^2(2\pi f_o t)=\frac{1}{2}(1+\cos(4\pi f_o t))$ ha come trasformata i 3 impulsi:

$$X(f)=\frac{1}{4}\delta(f+2f_o)+\frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{4}\delta(f-2f_o)$$

c - La trasformata dell'uscita e' data da $Y(f)=X(f)H(f)$. Il valore della frequenza f_o del segnale $x(t)=\cos^2(2\pi f_o t)$ che minimizza la potenza del segnale in uscita dal sistema dato e' tale da portare i due impulsi esterni di $X(f)$ in corrispodenza dei minimi di $H(f)$.

Quindi si minimizza la potenza dell'uscita se $2f_o=\frac{1}{\tau}$ o ad un suo multiplo intero *k*:

$$f_o=\frac{k}{2\tau}$$

ESERCIZIO 2

Sia dato il processo casuale gaussiano tempo continuo $x(t)$ con valor medio unitario e con densita' spettrale di potenza $S_x(f)=\delta(f)+rect\left(\frac{f}{10}\right)$.

a - La potenza del processo casuale e' data dall'integrale della densita' spettrale di potenza $S_x(f)=\delta(f)+rect\left(\frac{f}{10}\right)$. Cioe' $P=11$.

La sua funzione di autocorrelazione e' data dall'antitrasformata di Fourier della densita' spettrale di potenza:

$$R_x(\tau)=1+\frac{\sin\pi 10\tau}{\pi\tau}$$

e la sua varianza e' uguale all'autocorrelazione in 0 (cioe' la potenza) meno il valor medio al quadrato: $\sigma_x^2=10$.

b – Il processo dato viene campionato con intervallo di campionamento T=0.1 secondi generando il processo casuale discreto x_n. La densita' spettrale di potenza del processo casuale discreto x_n si ottiene replicando in frequenza $S_x(f)=\delta(f)+rect\left(\frac{f}{10}\right)$ a passo *1/T=10* e scalando in ampiezza di *1/T=10*.

Si ottiene una costante pari a *10* tra -*5* e *5* Hz e un impulso di area *10* in *f=0* periodica di periodo *10*.

$$\hat{S}_x(f)=10\delta(f)+10rect\left(\frac{f}{10}\right)$$ periodica di periodo *10*

In frequenza normalizzata

$$\hat{S}_x(\phi)=\delta(f)+10rect(f)$$ periodica di periodo 1.

c - L'autocorrelazione del processo casuale discreto x_n e':

$$R_x[m] = 1 + 10\frac{\sin \pi m}{\pi m} = 1 + 10\delta_m$$

La DFT della costante unitaria e' data da un impulso nell'origine pari al numero di campioni (N=10), mentre la DFT di un impulso nell'origine di ampiezza 10 e' una sequenza costante pari a 10:

$$X_k = 10 + 10\delta_k$$

d – IL processo casuale discreto viene filtrato con la risposta all'impulso $h_n = -\frac{1}{4}\delta_{n+1} + \delta_n - \frac{1}{4}\delta_{n-1}$.
Il valor medio dell'uscita e' dato da:

$$m_y = m_x \sum h_n = m_x \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

L'autocorrelazione dell'uscita e' data dall'autocorrelazione dell'ingresso convoluta con la correlazione della risposta all'impulso:

$$R_y[m] = (1 + 10\delta_m) * \left(\frac{1}{16}\delta_{n-2} - \frac{1}{2}\delta_{n+1} + \frac{9}{8}\delta_n - \frac{1}{2}\delta_{n-1} + \frac{1}{16}\delta_{n-2} \right) =$$
$$= \frac{10}{16}\delta_{n-2} - \frac{10}{2}\delta_{n+1} + \frac{90}{8}\delta_n - \frac{10}{2}\delta_{n-1} + \frac{10}{16}\delta_{n-2} + \frac{1}{4}$$

ESERCIZIO 3

.**a** - La probabilita' del primo livello di quantizzazione (quello relativo ai valori negativi) e' ½. La probabilita' degli altri 4 livelli e' 1/8. L'entropia della sorgente numerica e' dunque:

$$H = -\frac{1}{2}\log_2 \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{8}\log_2 \frac{1}{8} = \frac{1}{2}\log_2 2 + \frac{1}{2}\log_2 2^3 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2\,\text{bit/livello}$$

b - La potenza dell'errore di quantizzazione dipende dagli intervalli di quantizzazione. L'intervallo di quantizzazione del primo livello (quello dei valori negativi) e' 4, mentre quello degli altri livelli e' 1.

$$P_{eq} = \frac{1}{2}P_{eq1} + 4 \cdot \frac{1}{8}P_{eq2} = \frac{1}{2}\frac{\Delta_1^2}{12} + 4 \cdot \frac{1}{8}\frac{\Delta_2^2}{12} = \frac{2}{3} + \frac{1}{24} = \frac{17}{24}$$