Segnali per le Telecomunicazioni - Secondo appello (Prati) - 20 Luglio 2010

La prima parte degli esercizi presenta una difficolta' minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficolta' nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficolta'.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova e' 2h e 30min.

Ordinamento 509

ESERCIZIO 1

Sia dato un sistema LTI con la risposta in frequenza $H(f) = \dfrac{\sin\left\{\pi T\left(f - 2/T\right)\right\}}{\pi\left(f - 2/T\right)}$.

a - Si tracci il grafico della risposta in frequenza data e si calcoli la riposta all'impulso $h(t)$

b - Si calcoli l'espressione della convoluzione tra $h(t)$ e $x(t) = \cos^2\left(2\pi\dfrac{t}{T} + \varphi\right)$.

ESERCIZIO 2

Sia dato il segnale tempo-continuo $x(t) = \dfrac{\sin(\pi Bt)}{\pi t}\cdot\cos\left(2\pi\dfrac{B}{2}t\right)$.

a - Si trovi il massimo valore di T per evitare alias in frequenza e si consideri la sequenza $x_n = x\left(nT/2\right)$.

b - Si traccino i grafici della trasformata di Fourier *X(f)* del segnale *x(t)* e della trasformata in frequenza normalizzata $X(\phi)$ della sequenza x_n.

c – Si calcoli l'espressione della DFT di 3 campioni di x_n con $0 \le n \le 2$.

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale discreto x_n stazionario con densita' di probabilita' delle ampiezze gaussiana con valor medio $m_x = 2$ e potenza $P = 6$. Sapendo che i campioni del processo sono tra loro statisticamente indipendenti:

a - Si calcoli l'epressione dell'autocorrelazione, dell'autocovarianza e del coefficiente di correlazione del processo casuale.

b – Si calcoli valor medio e varianza del processo casuale $y_n = \dfrac{1}{2}x_n - \dfrac{1}{4}x_{n-1} - \dfrac{1}{4}x_{n+1}$.

ESERCIZIO 4

Sia data la sorgente senza memoria composta da 8 simboli da codificare in forma binaria. I simboli si presentano ogni millisecondo e hanno probabilità decresenti: $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{32}, \dfrac{1}{64}, \dfrac{1}{128}, \dfrac{1}{128}$.

a Si calcoli il valore dell'entropia *H* della sorgente numerica data.

b - Si trovi una ragionevole codifica binaria della sorgente data, si ricavi il numero medio di bit per simbolo necessario alla codifica e la bit-rate media.

Segnali per le Telecomunicazioni - Secondo appello (Prati) - 20 Luglio 2010

La prima parte degli esercizi presenta una difficolta' minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficolta' nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficolta'.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova e' 2h e 30min.

Ordinamento 270

ESERCIZIO 1

Sia dato un sistema LTI con la risposta all'impulso $h(t) = rect\left[\frac{1}{20}(t-10)\right]$.

a - Si tracci il grafico della risposta in frequenza *H(f)*.
b - Si calcoli l'espressione dell'uscita del sistema *y(t)* quando l'ingresso e' dato dal segnale $x(t) = \cos^2\left(2\pi\frac{t}{40}\right)$.

ESERCIZIO 2

Sia dato il segnale tempo-continuo $x(t) = \frac{\sin(\pi B t)}{\pi t} \cdot \cos\left(2\pi\frac{B}{2}t\right)$.

a - Si trovi il massimo valore di T per evitare alias in frequenza e si consideri la sequenza $x_n = x\left(n T/2\right)$.
b - Si traccino i grafici della trasformata di Fourier *X(f)* del segnale *x(t)* e della trasformata in frequenza normalizzata $X(\phi)$ della sequenza x_n.
c – Si calcoli l'espressione della DFT di 3 campioni di x_n con $0 \le n \le 2$.

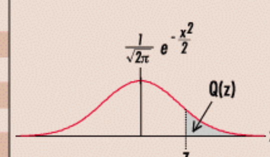
ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale discreto x_n stazionario con densita' di probabilita' delle ampiezze gaussiana con valor medio $m_x = 2$ e potenza $P = 6$. Sapendo che i campioni del processo sono tra loro statisticamente indipendenti:
a - Si calcoli l'epressione dell'autocorrelazione, dell'autocovarianza e del coefficiente di correlazione del processo casuale.
b – Si calcoli valor medio e varianza del processo casuale $y_n = \frac{1}{2}x_n - \frac{1}{4}x_{n-1} - \frac{1}{4}x_{n+1}$.

ESERCIZIO 4

Sia data una sorgente numerica con simboli che si presentano ogni millisecondo. La sorgente viene codificata in forma binaria con 2bit/simbolo e viene trasmessa con una modulazione PAM binaria con interferenza intersimbolica nulla attraverso un canale di trasmissione con banda passante di 2kHz e attenuazione di 80dB.
a - Si calcoli il massimo roll-off che si puo' utilizzare.
b - Si calcoli la minima potenza del trasmettitore volendo una probabilità di errore pari a 10^{-11} in presenza di una densita' spettrale di potenza del rumore al ricevitore $\frac{N_0}{2} = 10^{-18}$ W/Hz.

$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$	$Q(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_z^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$
3.71	10^{-4}
4.26	10^{-5}
4.75	10^{-6}
5.19	10^{-7}
5.61	10^{-8}
5.99	10^{-9}
6.36	10^{-10}
6.70	10^{-11}
7.03	10^{-12}



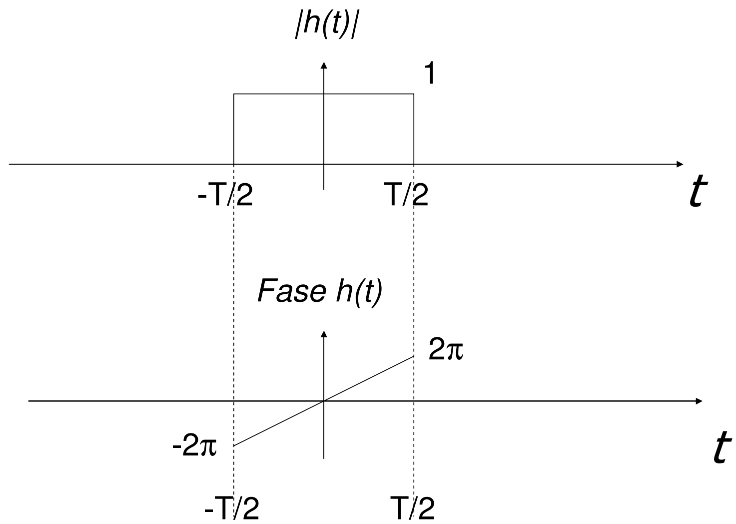
TELECOMUNICAZIONI secondo appello (Prati) - 20 Luglio 2010

SOLUZIONI

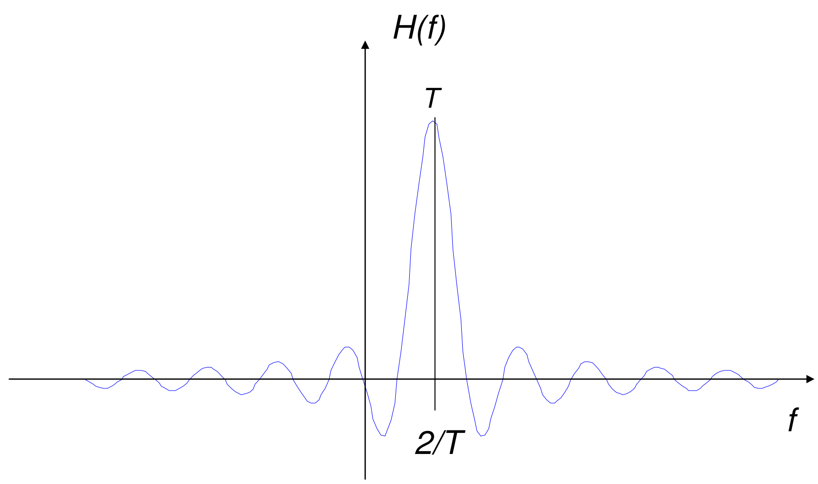
ESERCIZIO 1 (ordinamento 509)

a - La risposta all'impulso e' un rettangolo di ampiezza unitaria nell'intervallo $-\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2}$ con fase lineare:

$$h(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right)\exp\left\{j2\pi\frac{2}{T}t\right\}$$



La risposta in frequenza è un seno cardinale centrato alla frequenza *2/T* e zeri spaziati di *1/T*



b – Il segnale dato può essere scritto come:

$$x(t) = \cos^2\left(2\pi\frac{t}{T} + \varphi\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(4\pi\frac{t}{T} + 2\varphi\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\exp\left(j4\pi\frac{t}{T} + j2\varphi\right) + \frac{1}{4}\exp\left(-j4\pi\frac{t}{T} - j2\varphi\right)$$

Nelle frequenze abbiamo:

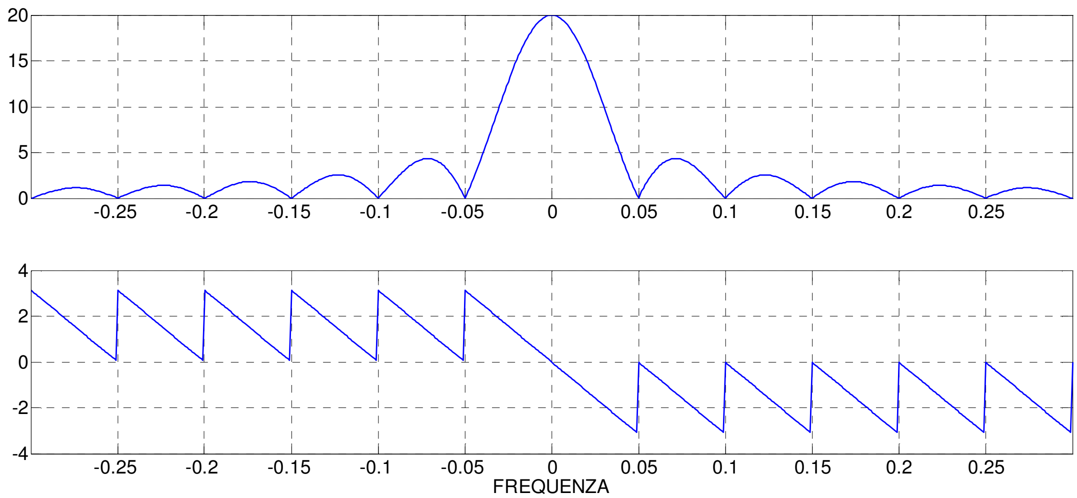
$$Y(f) = X(f)H(f) =$$
$$= \left[\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{4}\exp(-j2\varphi)\delta\left(f + \frac{2}{T}\right) + \frac{1}{4}\exp(j2\varphi)\delta\left(f - \frac{2}{T}\right)\right]H(f) =$$
$$= \frac{T}{4}\exp(j2\varphi)\delta\left(f - \frac{2}{T}\right)$$

Antitrasformando si ottene $y(t) = \frac{T}{4}\exp\left(j4\pi\frac{t}{T} + j2\varphi\right)$

ESERCIZIO 1 (ordinamento 270)

a - La risposta all'impulso *h(t)* e' un rettangolo di ampiezza unitaria nell'intervallo $0 \le t \le 20$. La sua trasformata vale:

$$X(f) = \frac{\sin(20\pi f)}{\pi f}\exp\{-j20\pi f\}$$



Nel calcolo della fase bisogna fare attenzione ai valori negativi del seno cardinale che aggiungono o tolgono π ai valori di fase dati dall'esponenziale complesso.

b – Nelle frequenze abbiamo:

$$Y(f) = X(f)H(f) =$$
$$= \left[\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{4}\delta\left(f + \frac{1}{20}\right) + \frac{1}{2}\delta\left(f - \frac{1}{20}\right)\right]\frac{\sin(20\pi f)}{\pi f}\exp\{-j20\pi f\} =$$
$$= \frac{1}{2}\delta(f)\frac{\sin(20\pi f)}{\pi f}\exp\{-j20\pi f\} = 10\delta(f)$$

Antitrasformando si ottene *y(t)*=10.

ESERCIZIO 2

a - La massima frequenza del segnale reale è $f_{\max} = B$. Il teorema del campionamento dice che occorre campionare con frequenza di campionamento almeno doppia: $f_s = 2B$ e quindi $T = \frac{1}{2B}$.

b – La trasformata di Fourier $X(f)$ del segnale $x(t)$ ha la seguente espressione:

$$X(f) = \frac{1}{2} rect\left(\frac{f}{2B}\right)$$

La trasformata in frequenza normalizzata $X(\phi)$ della sequenza x_n ha la seguente espresione:
$X(\phi) = 2B \cdot rect(2\phi)$ periodica di periodo unitario.

c – Se si campiona $x(t)$ con intervallo di campionamento $T = \frac{1}{4B}$, si ottiene la seguente sequenza:

$$x_n = x(nT) = x\left(\frac{n}{4B}\right) = \frac{\sin\left(\pi 2B \frac{n}{4B}\right)}{\pi \frac{n}{4B}} = 4B \frac{\sin\left(\pi n/2\right)}{\pi n}$$

I primi 3 campioni della sequenza valgono rispettivamente: $B/2$, $4B/\pi$, 0. L'espressione della DFT di questi 3 campioni si calcola dalla definizione:

$$X_k = \sum_{n=0}^{2} x_n \exp\left\{-j2\pi \frac{nk}{3}\right\} = \frac{B}{2} + \frac{4B}{\pi} \exp\left\{-j2\pi \frac{k}{3}\right\}$$

Quindi: $X_0 = \frac{B}{2} + \frac{4B}{\pi}$, $X_1 = \frac{B}{2} + \frac{4B}{\pi} \exp\left\{-j2\pi \frac{1}{3}\right\}$, $X_2 = \frac{B}{2} + \frac{4B}{\pi} \exp\left\{-j2\pi \frac{2}{3}\right\}$

ESERCIZIO 3

a – Il processo e' bianco quindi le espressioni generali di autorrelazione, autocovarianza e coefficiente di correlazione sono le seguenti:

$$R_x(m) = \sigma_x^2 \delta_m + |m_x|^2$$
$$C_x(m) = \sigma_x^2 \delta_m$$
$$\rho_x(m) = \delta_m$$

La varianza si calcola dalla potenza P e dal valor medio nel modo seguente:

$$\sigma_x^2 = P - |m_x|^2 = 6 - 4 = 2$$

Quindi:

$$R_x(m) = 2\delta_m + 4$$
$$C_x(m) = 2\delta_m$$
$$\rho_x(m) = \delta_m$$

b - Il valor medio e l'autocorrelazione del processo casuale y_n si ottengono dalla definizione:

$$m_y = m_x \cdot \sum_n h_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = 0$$

$$R_y[m] = R_x[m] * h_m * h^*_{-m} = (2\delta_m + 4) * \left(\frac{3}{8}\delta_m - \frac{2}{8}\delta_{m-1} - \frac{2}{8}\delta_{m+1} + \frac{1}{16}\delta_{m-2} + \frac{1}{16}\delta_{m+2}\right) =$$
$$= \frac{6}{8}\delta_m - \frac{4}{8}\delta_{m-1} - \frac{4}{8}\delta_{m+1} + \frac{2}{16}\delta_{m-2} + \frac{2}{16}\delta_{m+2}$$

Da cui:

$$\sigma_y^2 = C_y(0) = R_y(0) - |m_x|^2 = \frac{3}{4}$$

ESERCIZIO 4 (ordinamento 509)

a - Il valore dell'entropia H della sorgente numerica data si calcola dalla definizione:

$$H = \sum_{i=1}^{8} - p_i \log_2(p_i) = \left\{-\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}\log_2\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{8}\log_2\left(\frac{1}{8}\right) - \ldots\right\} = \quad \text{bit/livello}$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \frac{6}{64} + \frac{7}{128} + \frac{7}{128} = \frac{127}{64}$$

b - La piu' semplice codifica binaria della sorgente numerica trovata al punto precedente si ricava come codice di Huffmann. In questo caso si rirtova che il numero medio di bit per simbolo è uguale all'entropia della sorgente. Da cui la bit rate media risulta essere $R_b = \frac{127}{64}1000 \approx 2Kbit/s$.

ESERCIZIO 4 (ordinamento 270)

a - La cadenza di bit vale $R_b = 2 \cdot 1000 = 2Kbit/s$. La banda necessaria per la trasmissione binaria di questa bit rate dipende dal valore del roll-off utilizzato e varia all'interno del seguente intervallo di valori: $\frac{R_b}{2} \le B \le R_b$. Avendo a disposizione 2KHz di banda per trasmettere 2Kbit/s si puo' utilizzare il roll-off massimo quindi uguale a 1.

b - La probabilità di errore di bit necessaria rispettare la specifica di progetto vale:

$$P(\varepsilon_b) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = 10^{-11}$$

Dalle tabelle allegate si ricava che:

$$\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} = 6.7$$

Dunque: $E_b \approx 45\frac{N_0}{2} = 4.5 \cdot 10^{-17}$ e $P_R = \frac{E_b}{T_b} = E_b R_b = 4.5 \cdot 10^{-17} \cdot 2000 = 9 \cdot 10^{-14} W$

Infine $P_T = P_R \cdot 10^8 = 9 \cdot 10^{-6} W = 9\mu W$