Segnali per le comunicazioni – Appello del 29/7/2020

Esercizio 1

Sia dato il segnale $x(t) = \cos(2\pi f_o t) + \cos\big(2\pi f_o (t+\tau)\big)$

A) Si trovi l'espressione della trasformata di Fourier $X(f)$ in funzione del ritardo τ.

B) Si traccino i grafici di modulo e fase di $X(f)$ assumendo $\tau = \frac{1}{4f_o}$

C) Sempre assumendo $\tau = \frac{1}{4f_o}$, si campioni $x(t)$ con frequenza di campionamento $f_s = f_o$ ottenendo il segnale discreto x_n.

Si calcoli l'espressione del segnale tempo continuo $x_R(t)$ ricostruito dai campioni del segnale discreto x_n.

Soluzione Esercizio 1 del 29/7/2020

Sia dato il segnale $x(t) = \cos(2\pi f_o t) + \cos\big(2\pi f_o(t+\tau)\big)$

A) Si trovi l'espressione della trasformata di Fourier $X(f)$ in funzione del ritardo τ.

$$X(f) = \frac{1}{2}[\delta(f-f_o) + \delta(f+f_o)]\big(1 + e^{j2\pi f\tau}\big)$$
$$= \frac{1}{2}\delta(f-f_o)\big(1+e^{j2\pi f_o\tau}\big) + \frac{1}{2}\delta(f+f_o)\big(1+e^{-j2\pi f_o\tau}\big)$$

B) Si traccino i grafici di modulo e fase di $X(f)$ assumendo $\tau = \frac{1}{4f_o}$

$$X(f) = \frac{1}{2}\delta(f-f_o)(1+j) + \frac{1}{2}\delta(f+f_o)(1-j)$$

$$|X(f)| = \frac{\sqrt{2}}{2}\delta(f-f_o) + \frac{\sqrt{2}}{2}\delta(f-f_o)$$

$$fase_{X(f)} = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & f = f_o \\ -\frac{\pi}{4} & f = -f_o \end{cases}$$

C) Sempre assumendo $\tau = \frac{1}{4f_o}$, si campioni $x(t)$ con frequenza di campionamento $f_s = f_o$ ottenendo il segnale discreto x_n. Si calcoli l'espressione del segnale tempo continuo $x_R(t)$ ricostruito dai campioni del segnale discreto x_n.

$$\tilde{X}(f) = f_o \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\delta(f-f_o-kf_o)(1+j) + \frac{1}{2}\delta(f+f_o-kf_o)(1-j) = f_o\delta(f)\ periodica\ f_o$$

$$X_R(f) = \delta(f)$$

$$x_R(t) = 1$$

Oppure semplicemente da $x\left(\frac{n}{f_o}\right) = \cos\left(2\pi f_o \frac{n}{f_o}\right) + \cos\left(2\pi f_o \frac{n}{f_o} + \frac{\pi}{2}\right)$ =1

Segnali per le comunicazioni – Appello del 29/7/2020

Esercizio 2

Sia dato il processo casuale stazionario tempo continuo $x(t)$ la cui autocorrelazione vale

$R_x(\tau) = rect(\tau) * rect(\tau)$.

Il processo $x(t)$ viene campionato con intervallo di campionamento $T = 0.6s$ ottenendo il processo casuale discreto x_n.

A) Si trovi l'espressione della densità spettrale di potenza del processo casuale discreto x_n.

B) Si trovi l'espressione dell'autocorrelazione del processo casuale $y_n = x_n - x_{n-1}$

C) Si trovi l'espressione della densità spettrale di potenza del processo casuale z_n formato dai soli campioni di posizione pari di x_n.

Soluzione Esercizio 2 del 29/7/2020

Sia dato il processo casuale stazionario tempo continuo $x(t)$ la cui autocorrelazione vale
$R_x(\tau) = rect(\tau) * rect(\tau)$.

Il processo $x(t)$ viene campionato con intervallo di campionamento $T = 0.6s$ ottenendo il processo casuale discreto x_n.

A) Si trovi l'espressione della densità spettrale di potenza del processo casuale discreto x_n.

L'autocorrelazione del processo casuale discreto è: $R_x[m] = \delta_m + 0.4\delta_{m-1} + 0.4\delta_{m+1}$
La densità spettrale di potenza è data dalla sua trasformata di Fourier:
$S_x(\phi) = 1 + 0.8\cos 2\pi\phi$

B) Si trovi l'espressione dell'autocorrelazione del processo casuale $y_n = x_n - x_{n-1}$

$$R_y[m] = R_x[m] * (2\delta_m - \delta_{m-1} - \delta_{m+1}) = 1.2\delta_m - 0.2\delta_{m\pm1} - 0.4\delta_{m\pm2}$$

C) Si trovi l'espressione della densità spettrale di potenza del processo casuale z_n formato dai soli campioni di posizione pari di x_n.

$$z_n = x_{2n}$$

$$R_z[m] = E[z_n z_{n+m}] = E[x_{2n}x_{2n+2m}] = R_x[2m] = \delta_m$$

Da cui

$$S_z(\phi) = 1$$