SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI appello del 24 Luglio 2014

La prima parte degli esercizi presenta una difficolta' minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficolta' nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficolta'.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova è 2h.
I punteggi indicano il peso relativo dell'esercizio.

ESERCIZIO 1

Sia dato il segnale $x(t)$ la cui trasformata $X(f)$ ha le seguenti espressioni di modulo e fase:

$$|X(f)| = rect\left(f - \frac{1}{2}\right) * rect\left(f - \frac{1}{2}\right)$$
$$\angle X(f) = -2\pi f$$

a [5]- Si calcoli l'espressione del segnale $x(t)$.

b [3]- Si calcoli il seguente integrale di convoluzione $y(t) = x(t) * \cos^2\left(\pi \frac{t}{2}\right)$.

c [2]- Si calcoli la potenza di $y(t)$.

ESERCIZIO 2

Si consideri il segnale $x(t) = \cos\left(2\pi \frac{t}{T_o} + \varphi\right)$. Il segnale $x(t)$ viene campionato a passo T ottenendo il segnale discreto x_n.

a [5]**-** Si tracci il grafico della Trasformata di Fourier del segnale x_n sia in frequenza, sia in frequenza normalizzata nel caso in cui $T = \frac{T_o}{3}$.
b [4]**-** Si calcoli l'espressione X_k della DFT di 100 campioni di x_n nel caso in cui $T = T_o$
c [3]**-** Si trovi l'espressione di uno tra i possibili segnali reale $y(t) \neq x(t)$ che, campionato anch'esso con $T = \frac{T_o}{3}$, produca gli stessi campioni x_n.

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale stazionario x_n in cui ogni campione è indipendente da tutti gli altri. Si sa inoltre che il campione in $n = 0$ ha la seguente densità di probabilità delle ampiezze:
$p_{x_o}(a) = -2a \cdot rect\left(a + \frac{1}{2}\right)$.

a [5]- Si scriva l'espressione della densità spettrale di potenza del processo casuale x_n.
b [5]– Si scriva l'espressione della funzione di autocorrelazione del processo casuale $y_n = -3x_n + 6x_{n-1} - 3x_{n-2}$.

SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI appello del 24 Luglio 2014

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a) La anti-trasformata di $rect\left(f-\frac{1}{2}\right)$ è $\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\exp\{j\pi t\}$

La anti-trasformata di $rect\left(f-\frac{1}{2}\right)*rect\left(f-\frac{1}{2}\right)$ è $\left[\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\exp\{j\pi t\}\right]^2=\left[\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right]^2\exp\{j2\pi t\}$

La anti-trasformata di $X(f)$ è $x(t)=\left(\frac{\sin(\pi(t-1))}{\pi(t-1)}\right)^2\exp\{j2\pi(t-1)\}=\left(\frac{\sin(\pi(t-1))}{\pi(t-1)}\right)^2\exp\{j2\pi t\}$

b) $y(t)=x(t)*\cos^2\left(\pi\frac{t}{2}\right)=x(t)*\frac{1}{2}[1+\cos(\pi t)]=\frac{1}{8}\exp\{j\pi(t-1)\}=-\frac{1}{8}\exp\{j\pi t\}$

Infatti in frequenza abbiamo:

$$Y(f)=X(f)\cdot\left[\frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{4}\delta\left(f-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\delta\left(f+\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{1}{2}\exp\{-j2\pi f\}\frac{1}{4}\delta\left(f-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}\delta\left(f-\frac{1}{2}\right)$$

c) La potenza di $y(t)$ vale 1/64.

ESERCIZIO 2

a – dato che la massima frequenza del segnale dato è $\frac{1}{T_o}$ e la frequenza di campionamento è $\frac{3}{T_o}$, non c'è alias e

$X(f)=\frac{3}{T_o}\frac{1}{2}e^{j\varphi}\delta\left(f-\frac{1}{T_o}\right)+\frac{3}{T_o}\frac{1}{2}e^{-j\varphi}\delta\left(f+\frac{1}{T_o}\right)$ periodica di periodo $\frac{3}{T_o}$

$X(\phi)=\frac{1}{2}e^{j\varphi}\delta\left(\phi-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}e^{-j\varphi}\delta\left(\phi+\frac{1}{3}\right)$ periodica di periodo 1

b – Campionando $x(t) = \cos\left(2\pi \frac{t}{T_o} + \varphi\right)$ con $T = T_o$ si ottiene una costante $x_n = \cos(\varphi)$ e l'espressione X_k della DFT di 100 campioni è $X_k = 100\cos(\varphi)\delta_k$

c - Sapendo che a pari frequenza di campionamento f_s tutti gli esponenziali complessi di frequenza $f_o + kf_s$ sono tra loro indistinguibili (alias in frequenza), qualsiasi coseno con frequenza pari a $\frac{1}{T_o} + k\frac{3}{T_o}$ e fase iniziale φ produce gli stessi campioni x_n.

Ad esempio $y(t) = \cos\left(2\pi \frac{4t}{T_o} + \varphi\right)$

ESERCIZIO 3

a – La densità di probabilità delle ampiezze di x_n è lineare tra 0 e -1.

$$m_x = -\frac{2}{3} \qquad E\left[|x|^2\right] = \frac{1}{2} \qquad \sigma_x^2 = E\left[|x|^2\right] - |m_x|^2 = \frac{1}{18}$$

$S_x(\phi) = \sigma_x^2 + |m_x|^2 \delta(\phi) = \frac{1}{18} + \frac{4}{9}\delta(\phi)$ periodica di periodo 1

b – Il processo x_n viene convoluto con la seguente risposta all'impulso: $h_n = -3\delta_n + 6\delta_{n-1} - 3\delta_{n-2}$

$$R_y[m] = R_x[m] * h_m * h_{-m} = \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{18}\delta_m\right) * \left(9\delta_{m+2} - 36\delta_{m+1} + 54\delta_m - 36\delta_{m-1} + 9\delta_{m-2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\delta_{m+2} - 2\delta_{m+1} + 3\delta_m - 2\delta_{m-1} + \frac{1}{2}\delta_{m-2}$$