SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI (Prati)
Appello – 19 Luglio 2019

La prima parte degli esercizi presenta una difficolta' minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficolta' nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficolta'.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova è 2h.

ESERCIZIO 1

Sia dato un sistema LTI con risposta all'impulso data dalla seguente convoluzione: $h(t)=\left[1-\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right]^2$.

a - Si calcoli l'espressione risposta in frequenza $H(f)$ del sistema dato.

b - Si traccino i grafici di modulo e fase di $H(f)$.

c - Si trovi l'espressione dell'uscita *y(t)* quando all'ingresso del sistema si pone il segnale
$x(t)=\cos\left(2\pi\frac{1}{4}t+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(2\pi\frac{3}{4}t\right)$

ESERCIZIO 2

Sia dato il segnale tempo continuo $x(t)=\left[\left(\frac{\sin \pi Bt}{\pi t}\right)^2-\frac{3}{4}B\delta(t)\right]*\frac{\sin(\pi 2Bt)}{\pi t}$.

a – Trovare la minima frequenza di campionamento per evitare alias in frequenza.

b – Il segnale dato viene campionato con frequenza di campionamento $f_s=B$ Hz. Trovare l'espressione della trasformata di Fourier del segnale discreto x_n.
c – Si trovi l'espressione del segnale tempo continuo ricostruito dal segnale discreto x_n.

ESERCIZIO 3

Si consideri il processo casuale stazionario tempo discreto reale v_n con densità spettrale di potenza $S_v(\phi)=\delta(\phi)+6rect(2\phi)$ (periodica di periodo 1).

a –Si scriva l'espressione dell'autocorrelazione del processo dato.

b – Si calcoli la potenza del processo casuale $z_n=v_n+v_{n-2}$

c – Si formi il processo casuale $x_n=v_{2n}-1$. Il processo x_n viene filtrato con un filtro la cui risposta in frequenza è $H(f)$. Sapendo che la cross-correlazione tra uscita e ingresso è $R_{yx}[m]=0.3^m u_m$ si trovi l'espressione di $H(f)$.

SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI (Prati)
Appello – 19 Luglio 2019

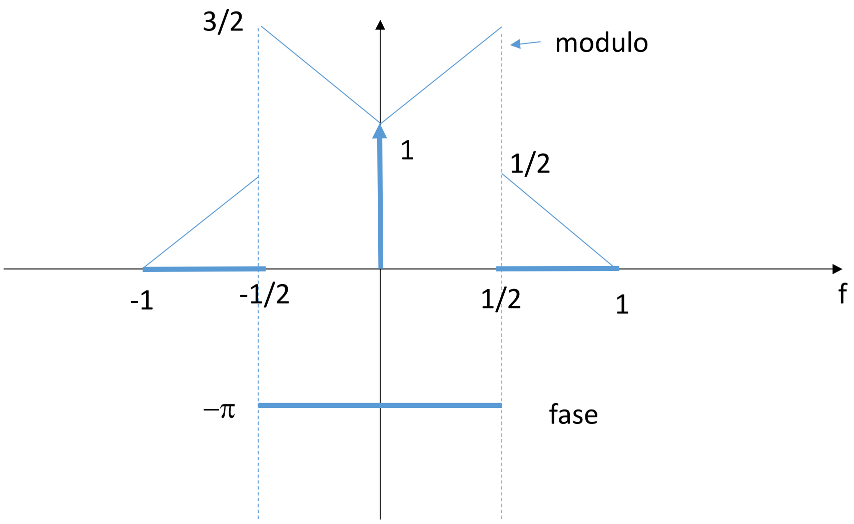
SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a – La risposta in frequenza del sistema dato ha la seguente espressione:

$H(f) = \delta(f) + tri(f) - 2rect(f)$

b – Grafici di modulo e fase di $H(f)$



c –La trasformata di Fourier dell'ingresso $x(t)$ è composta da 4 impulsi alle frequenze $f = \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{3}{4}$.

Questi vengono moltiplicati rispettivamente per $-\frac{5}{4}, \frac{1}{4}$.

L'uscita ha la seguente espressione:

$y(t) = -\frac{5}{4}\cos\left(2\pi\frac{1}{4}t + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{4}\cos\left(2\pi\frac{3}{4}t\right)$

ESERCIZIO 2

a - La trasformata di $x(t)=\left[\left(\frac{\sin \pi Bt}{\pi t}\right)^2-\frac{3}{4}B\delta(t)\right]*\frac{\sin(\pi 2Bt)}{\pi t}$ è $X(f)=B\cdot tri\left(\frac{f}{B}\right)-\frac{3B}{4}rect\left(\frac{f}{2B}\right)$ dove si è definito $tri(f)=rect(f)*rect(f)$. La massima frequenza del segnale è dunque BHz e per il teorema del campionamento, la minima frequenza di campionamento per evitare alias è $f_s=2B$.

b – Campionando il segnale con $f_s=B$ si ottiene il segnale x_n la cui trasformata di Fourier ha la seguente espressione:

$\tilde{X}(f)=-\frac{B^2}{2}$ o equivalentemente $\tilde{X}(f)=-\frac{B^2}{2}rect\left(\frac{f}{B}\right)$ di periodo B

c – Il segnale tempo continuo ricostruito dai campioni di x_n si ottiene antitrasformando $\tilde{X}(f)$ moltiplicata per $\frac{1}{f_s}=\frac{1}{B}$ nella banda $-\frac{f_s}{2}\leq f\leq\frac{f_s}{2}$ cioè nella banda $-\frac{B}{2}\leq f\leq\frac{B}{2}$

Quindi la trasformata del segnale ricostruito sarà:

$$X_R(f)=-\frac{B}{2}rect\left(\frac{f}{B}\right)$$

Il segnale ricostruito: $x_R(t)=-\frac{B}{2}\frac{\sin \pi Bt}{\pi t}$

ESERCIZIO 3

a – Integrando $S_v(\phi)=\delta(\phi)+6rect(2\phi)$ nell'intervallo unitario, si ottiene la potenza del processo

$$P=\sigma_v^2+m_v^2=4$$

Il valor medio al quadrato è l'area dell'impulso della densità spettrale di potenza e dunque:

$$m_v^2=1 \quad \sigma_v^2=3$$

L'autocorrelazione del processo dato ha la seguente espressione:

$$R_v[m]=6\frac{\sin \pi m/2}{\pi m}+1 .$$

b – Il processo $z_n = v_n + v_{n-2}$ può scriversi anche come $z_n = v_n * (\delta_n + \delta_{n-2})$

Dunque l'autocorrelazione di $z_n = v_n + v_{n-2}$ può essere calcolata dalla nota formula:

$$R_z[m] = R_v[m] * h_m * h_{-m} = \left(6\frac{\sin \pi m/2}{\pi m} + 1\right) * (2\delta_m + \delta_{m\pm 2}) = 12\frac{\sin \pi m/2}{\pi m} + 6\frac{\sin \pi(m\pm 2)/2}{\pi(m\pm 2)} + 4$$

La potenza: $R_y[0] = 10$

Oppure più velocemente si noto che i campioni v_n e v_{n-2} sono tra loro incorrelati e dunque la varianza della somma è uguale alla somma delle varianze ($\sigma_z^2 = 2\sigma_v^2 = 6$). A questo si deve aggiungere il valor medio al quadrato ($m_z^2 = 4$).

c – L'autocorrelazione del processo $x_n = v_{2n} - 1$ è: $R_x[m] = R_v[2m] - 1 = 3\delta_m$

La cross-correlazione uscita ingresso è: $R_{yx}[m] = 0.3^m u_m = R_x[m] * h_m = 3h_m$

Da qui: $h_m = \frac{1}{3} 0.3^m u_m$ e quindi $H(f) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1 - 0.3e^{-j2\pi f}}\right)$