SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI (Prati)
Appello – 17 luglio 2018

La prima parte degli esercizi presenta una difficolta' minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficolta' nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficolta'.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova è 2h.

ESERCIZIO 1

Sia dato un sistema LTI con risposta all'impulso $h(t)=\dfrac{\sin\left\{\pi B\left(t-\frac{1}{B}\right)\right\}}{\pi\left(t-\frac{1}{B}\right)}e^{j\pi Bt}$.

a - Si tracci il grafico della risposta in frequenza del sistema dato.

b- Si trovi l'espressione dell'uscita $y(t)$ quando all'ingresso del sistema si pone il segnale
$x(t)=2\cos\left(\pi\dfrac{B}{2}t\right)-2\cos(\pi Bt)$

ESERCIZIO 2

Sia dato il segnale tempo continuo $x(t)=\left(\dfrac{\sin\pi Bt}{\pi t}\right)^2\cos(2\pi Bt)$.

a – Trovare la minima frequenza di campionamento per evitare alias in frequenza.

b – Il segnale dato viene campionato con frequenza di campionamento $f_s=2B$ Hz. Tracciare il grafico della trasformata di Fourier del segnale campionato x_n.

c –Trovare l'espressione del segnale tempo continuo ricostruito dal segnale campionato x_n.

ESERCIZIO 3

Sia dato un processo casuale stazionario tempo-discreto gaussiano x_n a valor medio m_x e varianza σ_x^2.
Il coefficiente di correlazione tra il terzo e quarto campione è 0.5, quello tra il terzo e quinto campione è 0.25 e quello tra il terzo e i campioni dal sesto in poi è nullo.

a - Si calcoli l'autocorrelazione del processo x_n.
b – Il processo casuale x_n viene ritardato di 2 campioni e viene sottratto al processo originale generando il processo casuale y_n. Se ne calcolino valor medio e varianza.
c – Sapendo che in una particolare realizzazione del processo il valore assunto dal campione $x_1=3$, quale sarà il valor medio e la varianza del campione x_2 condizionato al valore assunto da x_1?

SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI (Prati)
Appello – 17 Luglio 2018

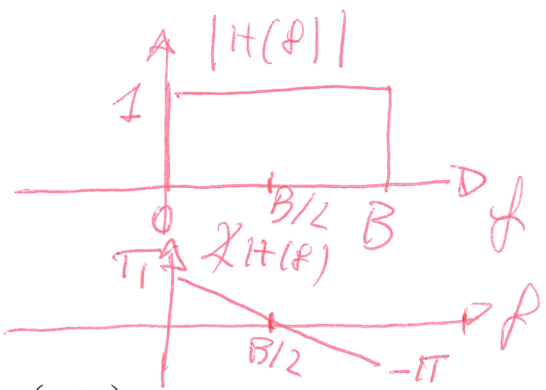
SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a – La risposta in frequenza del sistema dato ha la seguente espressione:

$$H(f) = rect\left(\frac{\left(f - B/2\right)}{B}\right) \cdot e^{-j2\pi \frac{\left(f - B/2\right)}{B}}$$

Il grafico può essere tracciato per modulo e fase:



$$|H(f)| = rect\left(\frac{\left(f - B/2\right)}{B}\right)$$

$$\sphericalangle H(f) = -2\pi \frac{\left(f - B/2\right)}{B}$$

b –La trasformata di Fourier dell'ingresso $x(t) = 2\cos\left(\pi \frac{B}{2} t\right) - 2\cos(\pi B t)$ vale:

$$X(f) = \delta\left(f \pm \frac{B}{4}\right) - \delta\left(f \pm \frac{B}{2}\right)$$

La trasformata dell'uscita vale dunque:

$$Y(f) = X(f)H(f) = e^{j\frac{\pi}{2}}\delta\left(f - \frac{B}{4}\right) - \delta\left(f - \frac{B}{2}\right)$$

L'uscita ha la seguente espressione:

$$y(t) = je^{j\pi B/2 t} - e^{j\pi B t}$$

ESERCIZIO 2

a - La trasformata di $x(t) = \left(\frac{\sin \pi B t}{\pi t}\right)^2 \cos(2\pi B t)$ è $X(f) = \frac{1}{2} tri\left(\frac{f}{B} + 1\right) + \frac{1}{2} tri\left(\frac{f}{B} - 1\right)$ dove $tri(f) = rect(f) * rect(f)$. Disegnando la trasformata si vede che questa è formata da 2 triangoli di banda bilatera $2B$ traslati rispettivamente di B e $-B$. La massima frequenza del segnale è dunque $2B$ e per il teorema del campionamento, la minima frequenza di campionamento per evitare alias è $f_s = 4B$.

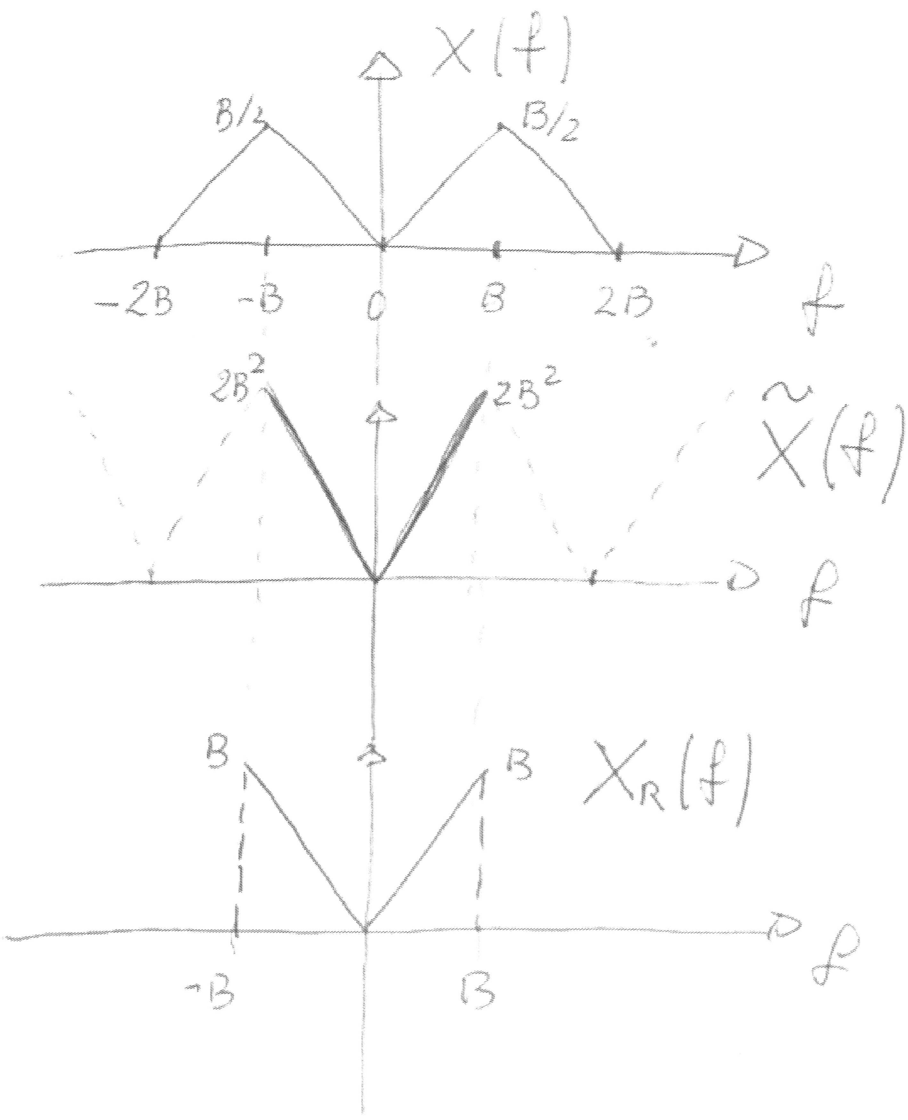
b – Campionando il segnale con $f_s = 2B$ si ottiene il segnale x_n la cui trasformata di Fourier $\widetilde{X}(f)$ è data da:

$$\widetilde{X}(f) = 2B^2 \cdot rect\left(\frac{f}{2B}\right) - 2B \cdot tri\left(\frac{f}{B}\right) \quad \text{periodica di periodo } f_s = 2B$$

c – Il segnale tempo continuo ricostruito dai campioni di x_n si ottiene antitrasformando un solo periodo di $\widetilde{X}(f)$ moltiplicata per $\frac{1}{f_s}$. Quindi la trasformata del segnale ricostruito sarà:

$$X_R(f) = B \cdot rect\left(\frac{f}{2B}\right) - tri\left(\frac{f}{B}\right)$$

Il segnale ricostruito: $x_R(t) = B\frac{\sin 2\pi Bt}{\pi t} - \left(\frac{\sin \pi Bt}{\pi t}\right)^2$



ESERCIZIO 3

a - L'autocorrelazione del processo si ricava immediatamente dalla definizione di coefficiente di correlazione:

$$R_x[m] = \sigma_x^2 \rho_x[m] + m_x^2 = \sigma_x^2 \left[\delta_m + \frac{1}{2}\delta_{m\pm1} + \frac{1}{4}\delta_{m\pm2} \right] + m_x^2$$

b - Il valor medio di $y_n = x_n - x_{n-2}$ è ovviamente nullo.
Quindi la varianza coincide con il valore quadratico medio:

$$\sigma_y^2 = E\left[(x_n - x_{n-2})^2\right] = 2R_x[0] - 2R_x[2] = 2\sigma_x^2 + 2|m_x|^2 - 2\sigma_x^2 \frac{1}{4} - 2|m_x|^2 = \frac{3}{2}\sigma_x^2$$

c - Per i processi gaussiani valor medio e varianza del futuro condizionato al valore assunto nel presente coincidono con i valori della predizione lineare.
Dunque, se $x_1 = 3$, la predizione lineare di x_2 (che coincide con il valor medio di x_2 condizionato al valore assunto da x_1) vale: $3 \cdot \rho_x[1] = 1.5$.

La sua varianza vale $\sigma_x^2 \left(1 - \rho^2{}_x[1]\right) = \sigma_x^2 \cdot 0{,}75$