Segnali per le comunicazioni –Appello del 22/1/2022

Esercizio 1

da svolgere in 35 minuti

Sia dato il segnale $x(t)$ la cui trasformata di Fourier è: $X(f) = (1 + \cos(2\pi f))rect(f)$.

A) Si trovi l'espressione del segnale $x(t)$

B) Si campioni $x(t)$ con frequenza di campionamento $f_s = \frac{1}{2}$ ottenendo il segnale discreto x_n. Si calcoli l'espressione del segnale ricostruito $x_R(t)$ a partire dai campioni x_n *(un disegno di $X(f)$ e di $X_R(f)$ è di aiuto).*

Soluzione Esercizio 1 del 22/1/2022

Sia dato il segnale $x(t)$ la cui trasformata di Fourier è: $X(f) = [1 + \cos(2\pi f)]rect(f)$.

A) Si trovi l'espressione del segnale $x(t)$

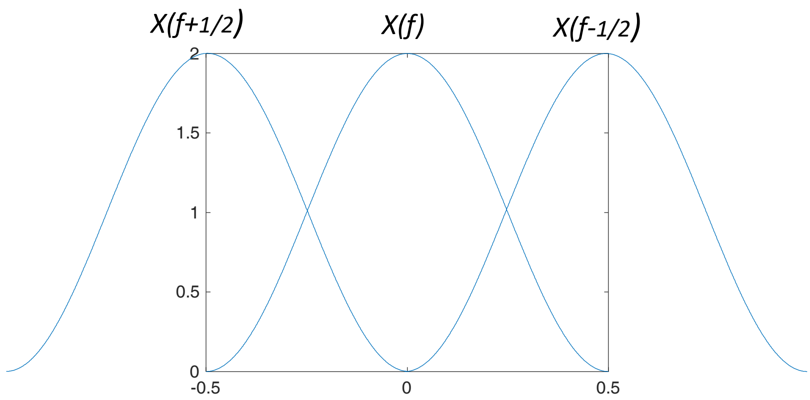
$$x(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} * \left(\delta(t) + \frac{1}{2}\delta(t+1) + \frac{1}{2}\delta(t-1)\right)$$

Dunque:

$$x(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} + \frac{1}{2}\frac{\sin(\pi(t+1))}{\pi(t+1)} + \frac{1}{2}\frac{\sin(\pi(t-1))}{\pi(t-1)}$$

B) Si campioni $x(t)$ con frequenza di campionamento $f_s = \frac{1}{2}$ ottenendo il segnale discreto x_n. Si calcoli l'espressione del segnale ricostruito $x_R(t)$ a partire dai campioni x_n.

La trasformata $X(f)$ viene replicata a passo $f_s = \frac{1}{2}$ e filtrata passa-basso nella banda $-\frac{f_s}{2} \div +\frac{f_s}{2}$ *(un disegno di $X(f)$ e di $X_R(f)$ è di aiuto).*



All'interno della banda $-\frac{1}{4} \leq f < \frac{1}{4}$ la somma delle repliche è una costante uguale a 2.

Analiticamente:

$$X_R(f) = \begin{cases} [1+\cos(2\pi f)] + \left[1+\cos\left(2\pi\left(f-\frac{1}{2}\right)\right)\right] & 0 \le f < \frac{1}{4} \\ [1+\cos(2\pi f)] + \left[1+\cos\left(2\pi\left(f+\frac{1}{2}\right)\right)\right] & -\frac{1}{4} < f < 0 \end{cases}$$

Tenendo presente che

$$\cos\left(2\pi\left(f \pm \frac{1}{2}\right)\right) = \cos(2\pi f \pm \pi) = -\cos(2\pi f)$$

Si ottiene: $X_R(f) = \begin{cases} 2 & -\frac{1}{4} \le f < \frac{1}{4} \\ 0 & altrove \end{cases}$

Da cui $x_R(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\frac{\pi t}{2}}$

Segnali per le comunicazioni –Appello del 22/1/2022

Esercizio 2

da svolgere in 35 minuti

Sia dato il processo casuale discreto x_n con valor medio 4, potenza 32 e coefficiente di correlazione $\rho_x[m] = \frac{\sin\left(\frac{\pi m}{2}\right)}{\frac{\pi m}{2}}$

A) Si scriva l'espressione dell'autocorrelazione del processo.
B) Si calcoli la potenza del processo $y_n = x_n - x_{n-1}$
C) Si calcoli la potenza del processo $z_n = x_n + x_{n+2} - 8$

Soluzione Esercizio 2 del 22/1/2022

Sia dato il processo casuale discreto x_n con valor medio 4, potenza 32 e coefficiente di correlazione $\rho_x[m] = \frac{\sin\left(\frac{\pi m}{2}\right)}{\frac{\pi m}{2}}$

A) Si scriva l'espressione dell'autocorrelazione del processo.

$$R_x[m] = \sigma_x^2 \rho_x[m] + m_x^2 = 16 \frac{\sin\left(\frac{\pi m}{2}\right)}{\frac{\pi m}{2}} + 16$$

dato che $\sigma_x^2 = P_x - m_x^2$

B) Si calcoli la potenza del processo $y_n = x_n - x_{n-1}$

$$P_y = E[|y_n|^2] = 2P_x - 2R_x[1] = 64 - 32\frac{2}{\pi} - 32 \approx 11.63$$

C) Si calcoli la potenza del processo $z_n = x_n + x_{n+2} - 8$

Il calcolo può essere eseguito come per il punto B. Tuttavia i conti sarebbero inutilmente lunghi. Infatti è sufficiente notare che i campioni $x_n,\ x_{n+2}$ sono tra loro incorrelati e quindi la varianza della somma è uguale alla somma delle varianze:

$$\sigma_z^2 = 2\sigma_x^2 = 32$$

Inoltre $z_n = (x_n - 4) + (x_{n+2} - 4)$ è la somma di due processi a valor medio nullo con la stessa varianza di x_n. Pertanto la potenza di z_n coincide con la sua varianza.

Alternativa forza bruta:

$$P_z = E[(x_n + x_{n+2} - 8)^2] = E\left[{x_n}^2 + {x_{n+2}}^2 + 64 + 2x_n x_{n+2} - 16x_n - 16x_{n-2}\right]$$

$$P_z = 2P_x + 64 + 2R_x[2] - 64 - 64 = 2R_x[2] = 32$$