SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI (Prati)
Quarto Appello – 23 Settembre 2016

La prima parte degli esercizi presenta una difficolta' minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficoltà nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficoltà.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova è 2h.

ESERCIZIO 1

Sia data la risposta all'impulso di un sistema LTI ottenuta dalla seguente convoluzione:

$$h(t) = \frac{\sin 2\pi t}{\pi t} e^{j\pi(t-1)} * \frac{\sin 2\pi t}{\pi t} e^{-j\pi t}.$$

a - Si traccino i grafici di modulo e fase della risposta in frequenza $H(f)$.

b - Si calcoli l'uscita $y(t)$ del sistema all'ingresso $x(t) = \frac{\sin \pi 4(t-2)}{4\pi(t-2)}$ e se ne calcoli l'energia.

ESERCIZIO 2

Sia dato il segnale tempo continuo $x(t) = \cos(2\pi f_o(t-\tau)) + \sin(2\pi f_o t)$. Il segnale dato viene campionato con frequenza di campionamento $f_s = f_o$ ottenendo la sequenza x_n.

a - Si calcoli la trasformata di Fourier della sequenza x_n sia in frequenza, sia in frequenza normalizzata.
b –Trovare l'espressione del segnale tempo continuo ricostruito dal segnale campionato.
c – Calcolare la DFT dei campioni di x_n con $-2 \le n \le 2$.

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale stazionario discreto x_n gaussiano con potenza $P = 4$ e valor medio $m_x = -1$. Del coefficiente di correlazione si sa solo che $\rho_x[m] = \begin{cases} a & m = -1 \\ 0 & m > 1 \end{cases}$

a - Si calcoli autocovarianza e densità spettrale di potenza del processo x_n.

b - Si dica, giustificando la risposta, quale intervallo di valori può assumere il parametro a.

c – Si scriva l'espressione della densità di probabilità delle ampiezze della variabile casuale x_{n+2} sapendo che $x_n = K$.

SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI (Prati)
Quarto Appello – 23 Settembre 2016
SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a – La risposta in frequenza ha modulo rettangolare nella banda $-\frac{1}{2} \le f \le \frac{1}{2}$ e fase costante nella stessa banda uguale a π. Infatti:

$h(t) = \frac{\sin 2\pi t}{\pi t} e^{j\pi(t-1)} * \frac{\sin 2\pi t}{\pi t} e^{-j\pi t} = -\frac{\sin 2\pi t}{\pi t} e^{j\pi t} * \frac{\sin 2\pi t}{\pi t} e^{-j\pi t}$ ha come trasformata di Fourier:

$$H(f) = -rect\left(\frac{f-\frac{1}{2}}{2}\right) \cdot rect\left(\frac{f+\frac{1}{2}}{2}\right) = -rect(f)$$

b - La trasformata di Fourier del segnale $x(t)$ è:

$$X(f) = \frac{1}{4} rect\left(\frac{f}{4}\right) e^{-j4\pi f\tau}$$

La trasformata dell'uscita è

$$Y(f) = -rect(f) \cdot {}^{1}\!/_{4}\, rect\left(\frac{f}{4}\right) e^{-j4\pi f\tau} = -{}^{1}\!/_{4}\, rect(f) e^{-j4\pi f\tau}$$

L'uscita è dunque: $y(t) = -{}^{1}\!/_{4} \frac{\sin \pi(t-2)}{\pi(t-2)}$

L'energia dell'uscita è: $E_y = \int \left| -{}^{1}\!/_{4}\, rect(f) e^{-j4\pi f\tau} \right|^2 df = {}^{1}\!/_{16}$

ESERCIZIO 2

a - La trasformata di Fourier del segnale $x(t) = \cos(2\pi f_o(t-\tau)) + \sin(2\pi f_o t)$

è data da

$$X(f) = \frac{1}{2}[\delta(f+f_o) + \delta(f-f_o)] e^{-j2\pi f\tau} + \frac{j}{2}\delta(f+f_o) - \frac{j}{2}\delta(f-f_o)$$

Moltiplicando gli impulsi per l'esponenziale complesso si ottiene:

$$X(f)=\frac{1}{2}\delta(f+f_o)e^{j2\pi f_o\tau}+\frac{1}{2}\delta(f-f_o)e^{-j2\pi f_o\tau}+\frac{j}{2}\delta(f+f_o)-\frac{j}{2}\delta(f-f_o)$$

La trasformata di Fourier del segnale campionato con frequenza di campionamento $f_s=f_o$ si ottiene replicando periodicamente a passo $f_s=f_o$ la trasformata del segnale continuo moltiplicata per $f_s=f_o$.

$\widetilde{X}(f)=\frac{f_o}{2}\delta(f)e^{j2\pi f_o\tau}+\frac{f_o}{2}\delta(f)e^{-j2\pi f_o\tau}+\frac{jf_o}{2}\delta(f)-\frac{jf_o}{2}\delta(f)=f_o\delta(f)\cos(2\pi f_o\tau)$ periodica a passo $f_s=f_o$

In frequenza normalizzata $\phi=\frac{f}{f_s}$

$\widetilde{X}(\phi)=f_o\delta(\phi f_o)\cos(2\pi f_o\tau)=\delta(\phi)\cos(2\pi f_o\tau)$

b – In altro modo si può vedere che campionando il segnale dato con $f_s=f_o$ si ottiene una sequenza costante $x_n=\cos(2\pi f_o\tau)$. Il segnale ricostruito sarà dunque la stessa costante $\hat{x}(t)=\cos(2\pi f_o\tau)$.

c – La DFT di 5 campioni costanti qualsiasi sia il loro ordine è banalmente un impulso nell'origine: $X_k=5\cos(2\pi f_o\tau)\delta_k$.

ESERCIZIO 3

a – Dai dati del problema si ricava immediatamente l'espressione del coefficiente di correlazione:

$$\rho_x[m]=\delta_m+a\delta_{m-1}+a\delta_{m+1}$$

La varianza: $\sigma_x^2=P-m_x^2=3$

L'autocovarianza: $C_x[m]=\sigma_x^2\rho_x[m]=3\delta_m+3a\delta_{m-1}+3a\delta_{m+1}$

L'autocorrelazione: $R_x[m]=C_x[m]+m_x^2=3\delta_m+3a\delta_{m-1}+3a\delta_{m+1}+1$

La densità spettrale di potenza: $S_x(\phi)=3+6a\cos(2\pi\phi)+\delta(\phi)$

b - La densità spettrale di potenza di un processo casuale è per definizione reale e positiva per qualsiasi valore di frequenza. Affinché ciò sia verificato è necessario che $|a|<\frac{1}{2}$.

c - Dall'espressione del coefficiente di correlazione si deduce che x_{n+2} è indipendente da x_n e quindi la sua densità di probabilità delle ampiezze è sempre gaussiana a varianza 3 e valor medio -1.