**SEGNALI PER LE COMUNICAZIONI (Prati) – 31 gennaio 2025**

Il tempo massimo per lo svolgimento della prova è di 2h.

## ESERCIZIO 1

Sia dato un sistema LTI con risposta all'impulso data dalla seguente convoluzione

$h(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} * \mathrm{rect}\left(\frac{t}{4} - \frac{1}{4}\right)$.

a - Si tracci il grafico della risposta in frequenza $H(f)$

b - Si calcoli l'uscita del sistema quando all'ingresso si pone il segnale

$x(t) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi t\right) + \cos\left(\frac{3}{4}\pi t\right)$.

## ESERCIZIO 2

Sia dato il segnale tempo-continuo $x(t) = \frac{\sin(2\pi t)\cos(\pi t)}{\pi t}$.

a - Si consideri la sequenza $x_n = x\left(\frac{n}{2}\right)$. Si tracci il grafico della trasformata di Fourier in frequenza normalizzata $X(\varphi)$ della sequenza $x_n$.

b – Si calcoli l'espressione della DFT di 90 campioni di $x_n$ con $0 \leq n \leq 89$.

## ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale discreto $x_n$ stazionario con densita' di probabilita' delle ampiezze uniforme con valor medio $m_x = -2$, varianza unitaria e campioni indipendenti l'uno dall'altro.

a - Si scriva l'espressione dell'autocovarianza del processo casuale dato.

b – Si calcoli l'espressione dell'autocorrelazione della media aritmetica di 3 campioni consecutivi del processo dato.

c – Si calcoli densità spettrale di potenza e la potenza del processo ottenuto al punto precedente.

Soluzioni – 31 gennaio 2015

## ESERCIZIO 1

Sia dato un sistema LTI con risposta all'impulso data dalla seguente convoluzione

$h(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} * \text{rect}\left(\frac{t}{4} - \frac{1}{4}\right).$

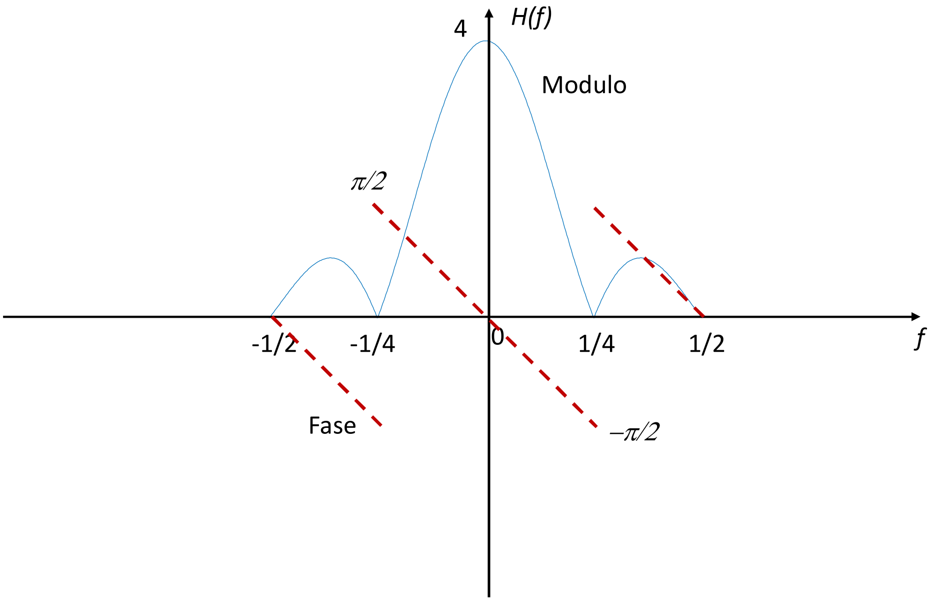
a - Si tracci il grafico della risposta in frequenza $H(f)$

La trasformata di $\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$ è $rect(f)$

La trasformata di $\text{rect}\left(\frac{t}{4} - \frac{1}{4}\right)$ è $\frac{\sin(4\pi f)}{\pi f} e^{-i2\pi f}$

La trasformata di $h(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} * \text{rect}\left(\frac{t}{4} - \frac{1}{4}\right)$ è $H(f) = \frac{\sin(4\pi f)}{\pi f}\ rect(f)\ e^{-i2\pi}$

I grafici di modulo e fase sono dunque quelli riportati nella seguente figura.




b - Si calcoli l'uscita del sistema quando all'ingresso si pone il segnale $x(t) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi t\right) + \cos\left(\frac{3}{4}\pi t\right).$

Alle frequenze del seno $\pm\frac{1}{4}$ il modulo di $H(f)$ è nullo, quindi è nulla anche l'uscita. Alle frequenze del coseno $\pm\frac{3}{8}$ l'ampiezza della risposta in frequenza vale $\frac{\sin\left(4\pi\frac{3}{8}\right)}{\pi\frac{3}{8}} \cong -0.85$ e le fase $\pm\pi\frac{3}{4} + \pi = \pm\frac{\pi}{4}$ rispettivamente. Dunque l'uscita rimane un coseno alla stessa frequenza con ampiezza 0.85 e fase iniziale $\frac{1}{4}\pi$:

$$y(t) = 0.85 \cdot \cos\left(\frac{3}{4}\pi t + \frac{1}{4}\pi\right)$$

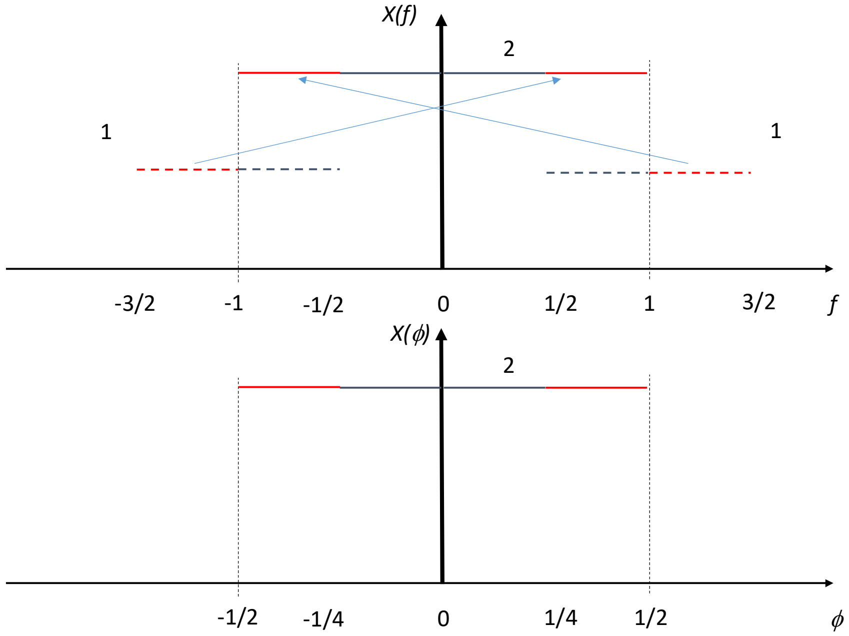
## ESERCIZIO 2

Sia dato il segnale tempo-continuo $x(t) = \frac{\sin(2\pi t)\cos(\pi t)}{\pi t}$.

a - Si consideri la sequenza $x_n = x\left(\frac{n}{2}\right)$. Si tracci il grafico della trasformata di Fourier in frequenza normalizzata $X(\varphi)$ della sequenza $x_n$.

La trasformata di $x(t)$ è: $\quad X(f) = \frac{1}{2}rect\left(\frac{f}{2} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}rect\left(\frac{f}{2} - \frac{1}{4}\right)$

Dunque la massima frequenza è 3/2, la minima frequenza di campionamento 3 e il massimo intervallo di campionamento $T = \frac{1}{3}$. Campionando $x(t)$ con $T = \frac{1}{2}$ s'introduce alias in frequenza e si ottengono i grafici seguenti di $\tilde{X}(f)$ periodica di periodo 2 e di $\tilde{X}(\varphi)$ periodica di periodo 1.




b – Si calcoli l'espressione della DFT di 90 campioni di $x_n$ con $0 \le n \le 89$.

Dall'espressione di $\tilde{X}(f)$ è facile vedere che il segnale campionato è:

$x_n = x\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{\sin(2\pi n/2)\cos(\pi n/2)}{\pi n/2} = 2\delta_n$ e dunque la trasformata discreta avrà la seguente espressione: $X_k = 2$ con $0 \leq k \leq 89$

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale discreto $x_n$ stazionario con densita' di probabilita' delle ampiezze uniforme con valor medio $m_x = -2$, varianza unitaria e campioni indipendenti l'uno dall'altro.

a - Si scriva l'espressione dell'autocovarianza del processo casuale dato.

Dai dati del problema, possiamo scrivere l'espressione dell'autocovarianza nella forma seguente:

$$C_x[m] = \delta_m$$

Infatti l'autocovarianza in $m=0$ è uguale alla varianza del processo $\sigma_x^2 = 1$ e tutti campioni con $|m| > 0$ sono nulli.

b – Si calcoli l'espressione dell'autocorrelazione della media aritmetica di 3 campioni consecutivi del processo dato.

L'autocorrelazione, poi, si trova sommando all'autocovarianza il valor medio al quadrato.

$$R_x[m] = \delta_m + 4$$

La media aritmetica di 3 campioni consecutivi del processo dato può vedersi come la convoluzione tra $x_n$ e la risposta all'impulso $h_n = \frac{1}{3}(\delta_n + \delta_{n-1} + \delta_{n-2})$

$$R_y[m] = R_x[m] * h_m * h_{-m}$$

$$h_m * h_{-m} = \frac{1}{3}\delta_m + \frac{2}{9}\delta_{m\pm1} + \frac{1}{9}\delta_{m\pm2}$$

Per cui: $R_y[m] = \frac{1}{3}\delta_m + \frac{2}{9}\delta_{m\pm1} + \frac{1}{9}\delta_{m\pm2} + 4$

c – Si calcoli densità spettrale di potenza e la potenza del processo ottenuto al punto precedente.

La densità spettrale di potenza di $y_n$ è: $S_y(f) = \frac{1}{3} + 4\,\delta(f) + \frac{4}{9}\cos(2\pi f) + \frac{2}{9}\cos(4\pi f)$ (periodica di periodo 1). La potenza sia calcolata come integrale di $S_y(f)$ sia come valore $R_y[0]$ è uguale a $4 + \frac{1}{3} = \frac{13}{3}$.