Segnali per le comunicazioni –Appello del 17/2/2023

Gli esercizi devono essere svolti nel tempo massimo di 2h

ESERCIZIO 1

Sia dato un sistema LTI ideale con risposta in frequenza $H(f) = \cos\left(2\pi \frac{f}{6}\right) \cdot rect\left(\frac{f}{9}\right)$.

a - Si traccino i grafici di modulo e fase della risposta in frequenza data $H(f)$.

b - Si calcoli l'espressione della risposta all'impulso $h(t)$ del sistema dato.

ESERCIZIO 2

Il segnale $x(t) = \frac{\sin\left(6\pi\left(t-{}^{1}/_{6}\right)\right)}{2\pi\left(t-{}^{1}/_{6}\right)}$ viene campionato con intervallo di campionamento *T* uguale a $\frac{1}{3}$.

a - Si trovi il valore dell'intervallo di campionamento T_{max} che evita il fenomeno dell'alias in frequenza.

b – Si calcoli la trasformata di Fourier della sequenza x_n sia in frequenza che in frequenza normalizzata.

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale discreto x_n stazionario con campioni tra loro indipendenti che possono assumere qualsiasi valore compreso tra -2 e 4 con la medesima probabilità.

a – Si trovi l'espressione dell'autocorrelazione $R_x[m]$ del processo dato.

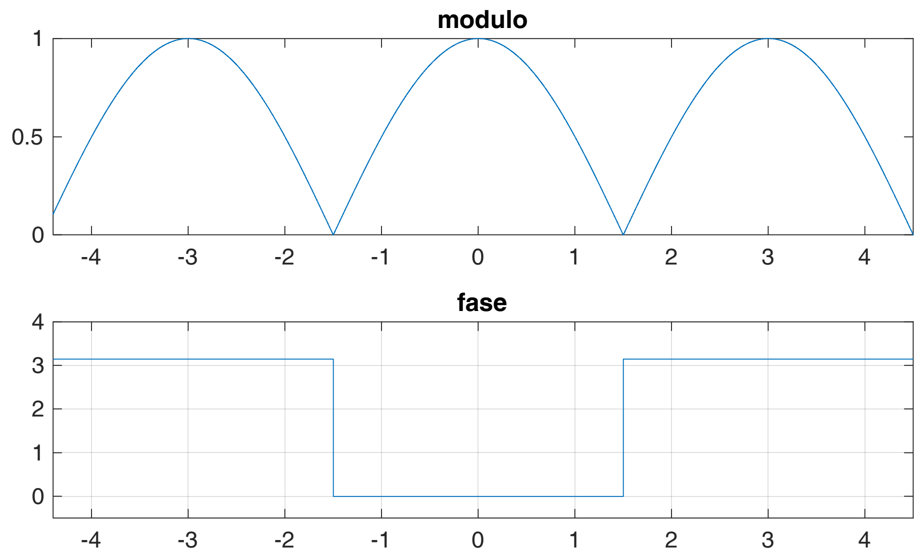
b –Il processo x_n viene filtrato con la risposta all'impulso $h_n = \delta_n + 3\delta_{n-1} + \delta_{n-2}$. Quanto vale l'autocorrelazione $R_y[m]$ del processo filtrato y_n?

c – Quanto vale la varianza della variabile casuale $v = y_0 - 2y_3 + y_6$?

d – Quanto vale la varianza della variabile casuale $z = y_0 - 2y_1$?

<u>**Soluzione**</u> <u>Esercizio 1 del 17/2/2023</u>

A) La risposta in frequenza $H(f) = \cos\left(2\pi \frac{f}{6}\right) \cdot rect\left(\frac{f}{9}\right)$ è puramente reale ed è limitata dal rettangolo tra -4.5 e +4.5 Hz. Il modulo è quello del coseno che è positivo tra -1.5 e +1.5 Hz e negativo altrove. La fase vale dunque 0 tra-1.5 e +1.5 Hz e π altrove. Si veda il grafico della seguente figura.



B) L'anti-trasformata di *H(f)* è data dalla seguente convoluzione:

$$h(t) = \frac{\sin(9\pi t)}{\pi t} * \frac{1}{2}\left(\delta\left(t - \frac{1}{6}\right) + \delta\left(t + \frac{1}{6}\right)\right)$$

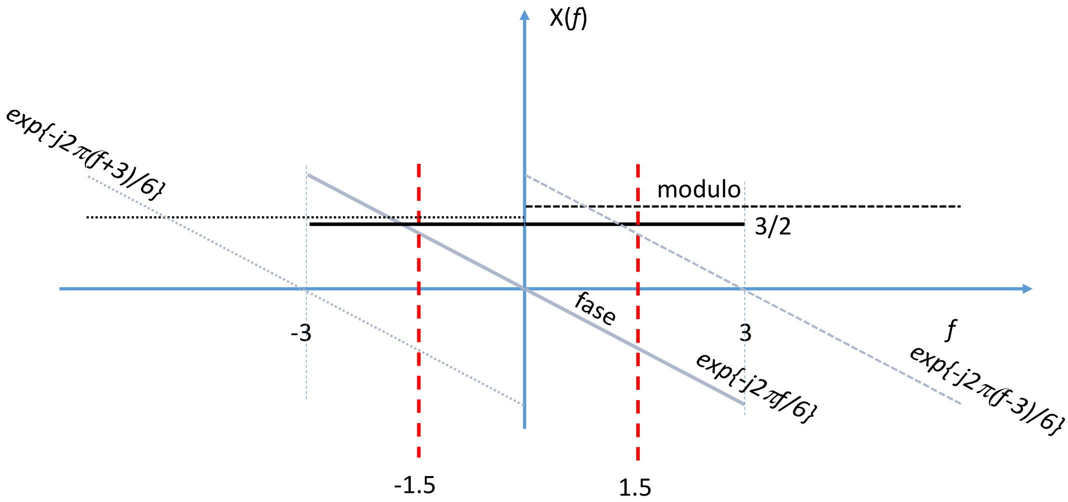
dunque:

$$h(t) = \frac{\sin\left(9\pi\left(t - {}^{1}/_{6}\right)\right)}{2\pi\left(t - {}^{1}/_{6}\right)} + \frac{\sin\left(9\pi\left(t + {}^{1}/_{6}\right)\right)}{2\pi\left(t + {}^{1}/_{6}\right)}$$

Soluzione Esercizio 2 del 17/2/2023

A) La frequenza massima del segnale è 3 quindi la minima frequenza di campionamento è 6 e il massimo intervallo di campionamento per evitare alias è $T_{max} = \frac{1}{6}$.
L'intervallo di campionamento vale dunque $T = \frac{1}{3}$ e dunque la frequenza di campionamento $f_s = 3$ introducono alias.

B) Il segnale $x(t) = \frac{\sin\left(6\pi\left(t-{}^1/_6\right)\right)}{2\pi\left(t-{}^1/_6\right)}$ ha una trasformata di modulo costante ½ tra -3 e +3 Hz e fase lineare in frequenza uguale a $-2\pi\frac{f}{6}$.
Campionando con $f_s = 3$ si considerano solo le repliche spettrali comprese tra -1.5 e +1.5 Hz.
In questo intervallo di frequenze avremo (si veda la seguente figura):



$\tilde{X}(f) = \frac{3}{2}e^{-j2\pi\frac{f}{6}} + \frac{3}{2}e^{-j2\pi\frac{(f-3)}{6}}$ nella banda di frequenze comprese tra 0 e +1.5 Hz
$\tilde{X}(f) = \frac{3}{2}e^{-j2\pi\frac{f}{6}} + \frac{3}{2}e^{-j2\pi\frac{(f+3)}{6}}$ nella banda di frequenze comprese tra -1.5 e 0 Hz

Semplificando si ottiene:

$\tilde{X}(f) = \frac{3}{2}e^{-j2\pi\frac{f}{6}} + \frac{3}{2}e^{-j2\pi\frac{f}{6}} \cdot e^{+j\pi} = 0$ nella banda di frequenze comprese tra 0 e +1.5 Hz
$\tilde{X}(f) = \frac{3}{2}e^{-j2\pi\frac{f}{6}} + \frac{3}{2}e^{-j2\pi\frac{f}{6}} \cdot e^{-j\pi} = 0$ nella banda di frequenze comprese tra -1.5 e 0 Hz

In conclusione, sia $\tilde{X}(f)$ che $\tilde{X}(\varphi)$ sono nulle come si vede anche da una semplice analisi nel tempo:

$$x_n = x\left(\frac{n}{3}\right) = \frac{\sin\left(6\pi\left(\frac{n}{3} - {}^1/_6\right)\right)}{2\pi\left(\frac{n}{3} - {}^1/_6\right)} = \frac{\sin(2\pi n - \pi)}{2\pi\left(\frac{n}{3} - {}^1/_6\right)} = 0$$

Soluzione Esercizio 3 del 17/2/2023

A) La varianza del processo dato è data dalla nota espressione della varianza delle variabili casuali uniformi: $\sigma_x^2 = \frac{\Delta^2}{12} = 3$. Il valor uguale è $m_x = \frac{4+(-2)}{2} = 1$.

Dunque l'autocorrelazione $R_x[m]$ del processo dato che ha campioni tra loro indipendenti è:

$$R_x[m] = \sigma_x^2 \delta_m + m_x^2 = 3\delta_m + 1$$

B) L'autocorrelazione del segnale processo filtrato vale:

$$R_y[m] = R_x[m] * h_m * h_{-m} = (3\delta_m + 1) * (11\delta_m + 6\delta_{m\pm1} + \delta_{m\pm2})$$

Dunque:

$$R_y[m] = 33\delta_m + 18\delta_{m\pm1} + 3\delta_{m\pm2} + 25$$

Si noti che $m_y = 5$

C) La varianza della variabile casuale $v = y_0 - 2y_3 + y_6$ si calcola immediatamente dato che le 3 variabili casuali sommate sono tra loro indipendenti:

$$\sigma_v^2 = \sigma_y^2 + 4\sigma_y^2 + \sigma_y^2 = 33 + 132 + 33 = 198$$

D) La varianza della variabile casuale $z = y_0 - 2y_1$ si calcola dalla definizione:

$$\sigma_z^2 = E[z^2] - m_z^2 = E[y_0^2 + 4y_1^2 - 4y_0 y_1] - 25$$

Si noti che $m_z = m_y(1-2) = -5$

$$\sigma_z^2 = R_y[0] + 4R_y[0] - 2R_y[1] - 25 = 5 \cdot (33 + 25) - 4 \cdot (18 + 25) - 25 = 93$$