SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI (Prati)
Appello – 18 Febbraio 2019

La prima parte degli esercizi presenta una difficolta' minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficoltà nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficoltà.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova è 2h.

ESERCIZIO 1

Sia dato un sistema LTI con risposta all'impulso $h(t) = \left\{ rect\left(\frac{t - T/2}{T}\right) * rect\left(\frac{t - T/2}{T}\right) \right\}$.

a - Si tracci il grafico della risposta all'impulso data.
b- Si trovi l'espressione della risposta in frequenza del sistema dato e se tracci il grafico.
c- Si calcoli l'uscita *y(t)* quando all'ingresso del sistema si pone il segnale $x(t) = \cos\left(2\pi \frac{t}{2T}\right)$

ESERCIZIO 2

Sia dato il segnale tempo continuo $x(t)$ la cui trasformata di Fourier vale $X(f) = |f| \cdot rect\left(\frac{f}{2B}\right)$

a – Il segnale dato viene campionato con frequenza di campionamento $f_s = B$. Trovare l'espressione del segnale campionato x_n.

b –Trovare l'espressione del segnale tempo continuo ricostruito dal segnale discreto x_n.

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale stazionario continuo a valor medio nullo $x(t)$ con densità spettrale di potenza costante nella banda $-10 \le f \le 10$ e varianza unitaria.

a –Si scriva l'espressione dell'autocorrelazione di $x(t)$.
b – Si calcoli la varianza del processo $y(t)$ ottenuto filtrando il processo $x(t)$ con il filtro di risposta in frequenza $H(f) = j2\pi f$.
c – Si scriva l'espressione della cross-correlazione tra $y(t)$ e $x(t)$.

SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI (Prati)
Appello – 18 Febbraio 2019

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a – La risposta all'impulso è formata dalla convoluzione di due rettangoli di durata T, di ampiezza unitaria, traslati di T/2 a destra. Il risultato della convoluzione è un triangolo isoscele compreso in $0 \le t \le 2T$ con vertice in $t = T$ e altezza T.

b –La trasformata di Fourier della risposta all'impulso vale: $H(f) = \left(\frac{\sin \pi T f}{\pi t}\right)^2 e^{j2\pi T f}$

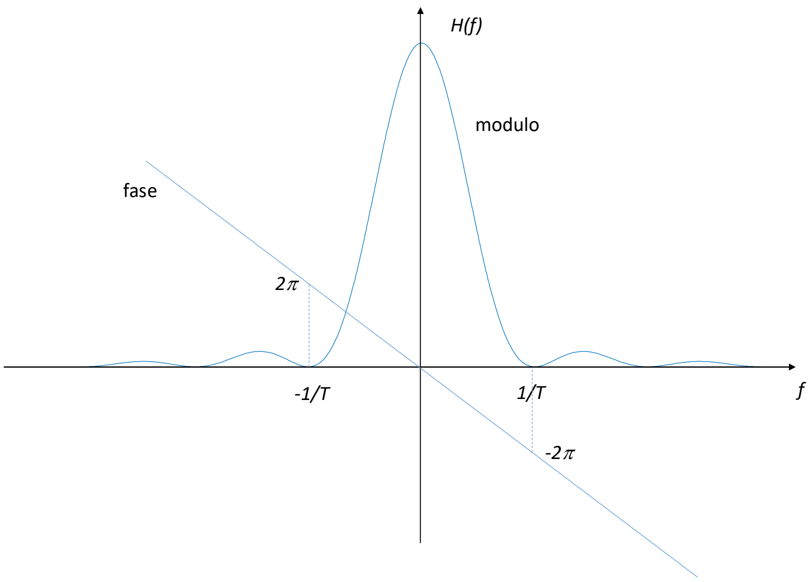

Figura 1 – Grafico della risposta in frequenza del sistema dato

c – La trasformata dell'ingresso è: $X(f) = \frac{1}{2}\delta\left(f - \frac{1}{2T}\right) + \frac{1}{2}\delta\left(f + \frac{1}{2T}\right)$

La trasformata dell'uscita è:

$$Y(f) = X(f)H(f) = \left\{\frac{1}{2}\delta\left(f - \frac{1}{2T}\right) + \frac{1}{2}\delta\left(f + \frac{1}{2T}\right)\right\} \cdot \left(\frac{\sin \pi B f}{\pi f}\right)^2 e^{j2\pi B f} = -\frac{2T^2}{\pi^2}\delta\left(f - \frac{1}{2T}\right) - \frac{2T^2}{\pi^2}\delta\left(f + \frac{1}{2T}\right)$$

L'uscita ha dunque la seguente espressione:

$$y(t) = -\frac{4T^2}{\pi^2}\cos\left(2\pi \frac{t}{2T}\right)$$

ESERCIZIO 2

a - La trasformata $X(f) = |f| \cdot rect\left(\frac{f}{2B}\right)$ è mostrata in figura 2.

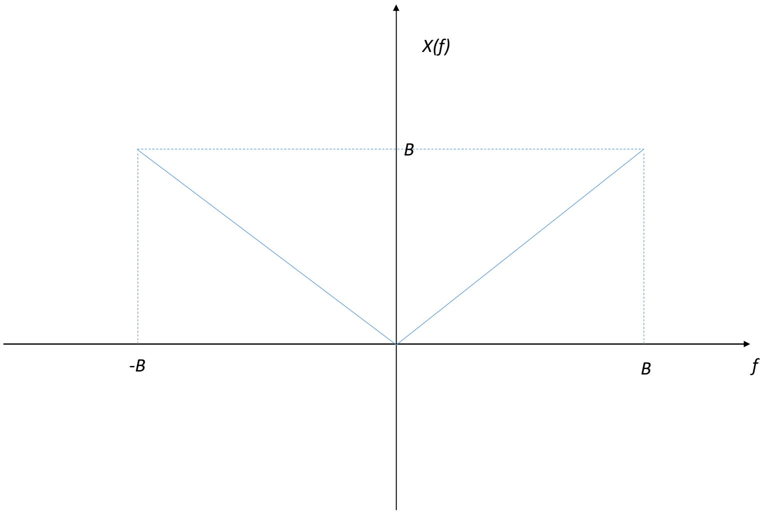

Figura 2 – Grafico della trasformata data.

Campionando il segnale con $f_s = B$ si sovrappone metà della banda del segnale e si ottiene una costante in frequenza pari a B^2.
Il segnale x_n è dunque (anti-trasformata in frequenza) un impulso discreto di ampiezza B:

$$x_n = \frac{1}{B} \int_{-B/2}^{B/2} B^2 e^{j2\pi f n \frac{1}{B}} df = B \frac{\sin\left(\pi B n \frac{1}{B}\right)}{\pi n} = B\delta_n$$

b – Il segnale tempo continuo ricostruito dai campioni di x_n si ottiene anti-trasformando un solo periodo di $\widetilde{X}(f)$ moltiplicata per $\frac{1}{f_s}$.
Quindi la trasformata del segnale ricostruito sarà:

$$X_R(f) = B \cdot rect\left(\frac{f}{B}\right)$$

Il segnale ricostruito: $x_R(t) = B \frac{\sin(\pi B t)}{\pi t}$

ESERCIZIO 3

a – L'espressione dell'autocorrelazione di $x(t)$ è un seno cardinale che in zero deve valere quanto la varianza.

$$R_x(\tau)=\frac{\sin(20\pi\tau)}{20\pi\tau} \quad .$$

b – Il valor medio è nullo quindi varianza e potenza coincidono. Nel nostro caso conviene calcolare la potenza come integrale della densità spettrale di potenza:

$$\sigma_y^2=\int_{-10}^{10}\frac{1}{20}|j2\pi f|^2\,df=\int_{-10}^{10}\frac{1}{20}4\pi^2 f^2 df=\frac{\pi^2}{5}\frac{f^3}{3}\Bigg|_{-10}^{10}=\frac{400\pi^2}{3}$$

c –L'espressione della cross-correlazione tra $y(t)$ e $x(t)$ si trova ragionando ancora nelle frequenze:

$$S_{yx}(f)=S_x(f)\cdot H(f)=j2\pi f\cdot S_x(f)$$

Dunque

$$R_y(\tau)=\frac{dR_x(\tau)}{d\tau}=\frac{\cos(20\pi\tau)}{\tau}-\frac{\sin(20\pi\tau)}{20\pi\tau^2}$$