TELECOMUNICAZIONI quinto appello - 11 Febbraio 2014

La prima parte degli esercizi presenta una difficolta' minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficolta' nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficolta'.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova è 2h:15m.
I punteggi indicano il peso relativo dell'esercizio.

ESERCIZIO 1

Sia dato il segnale $x(t) = \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right)\cos(6\pi t)$

a [6]- Si calcoli la trasformata di Fourier del segnale dato

b [6]- Si calcoli l'espressione dell'uscita *y(t)* quando il segnale $x(t)$ viene posto all'ingresso di un sistema con risposta in frequenza $H(f) = \left[rect\left(\frac{f}{4}\right) * rect\left(\frac{f}{4}\right)\right]\exp\{-j2\pi f\}$

ESERCIZIO 2

Si consideri il segnale $x(t) = \left[\frac{\sin(\pi t)}{2\pi t}\right]^2 + \cos(2\pi t)$

a [6]- Si calcoli trasformata di Fourier di $x_n = x(n)$ (intervallo di campionamento unitario).

b [6]- Si calcoli la DFT di x_n con $0 \le n \le 9$

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale stazionario continuo $x(t)$ la cui densità di probabilità delle ampiezze $p_x(a)$ è costante tra -1 e 3. L'autocovarianza $C_x(\tau)$ del processo $x(t)$ è un seno cardinale con il primo zero in $\tau = \frac{1}{5}$.

a [5]- Si scriva l'espressione dell'autocorrelazione $R_x(\tau)$ del processo dato.

b [3]– Le realizzazioni del processo $x(t)$ vengono campionate a passo $T = 1$. Quanto vale il coefficiente di correlazione tra due campioni successivi del processo casuale campionato x_n?

c [4]– Quanto vale l'autocorrelazione del processo casuale y_n ottenuto eseguendo la differenza di 2 campioni consecutivi di x_n?

<u>TELECOMUNICAZIONI quinto appello – 11 Febbraio 2014</u>

<u>SOLUZIONI</u>

<u>ESERCIZIO 1</u>

a) La trasformata di Fourier del segnale dato vale:

$$X(f)=\left[\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}\delta(f-2)+\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}\delta(f+2)\right]*\left[\frac{1}{2}\delta(f+3)+\frac{1}{2}\delta(f-3)\right]=$$

$$=\frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{3}}\delta(f-5)+\frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{3}}\delta(f-1)+\frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{3}}\delta(f+1)+\frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{3}}\delta(f+5)$$

b) La risposta in frequenza del sistema dato vale:

$H(f)=4tri\left(\frac{f}{8}\right)\exp\{-j2\pi f\}$ dove $tri(f)$ è una funzione triangolare tra – ½ e ½ .

La trasformata di Fourier dell'uscita vale dunque:

$$Y(f)=X(f)H(f)=\left[\frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{3}}\delta(f-1)+\frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{3}}\delta(f+1)\right]4tri\left(\frac{f}{8}\right)e^{-j2\pi ft}=$$

$$=\left[\frac{3}{4}e^{-j\frac{\pi}{3}}\delta(f-1)+\frac{3}{4}e^{j\frac{\pi}{3}}\delta(f+1)\right]e^{-j2\pi ft}$$

Antitrasformando si trova l'uscita:

$$y(t)=\frac{3}{2}\cos\left[2\pi(t-1)-\frac{\pi}{3}\right]$$

ESERCIZIO 2

a – La trasformata di Fourier del segnale $x(t)=\left[\frac{\sin(\pi t)}{2\pi t}\right]^2+\cos(2\pi t)$ è:

$$X(f)=\frac{1}{4}tri(f)+\frac{1}{2}[\delta(f-1)+\delta(f+1)]$$

Si campiona $x(t)$ con $T=1$. La trasformata $X(f)$ viene periodicizzata a passo 1 ottenendo:

$\tilde{X}(f)=\frac{1}{4}+\delta(f)$ periodica a passo 1 in frequenza (o frequenza normalizzata che coincidono).

b – Il risultato ottenuto al punto precedente mostra che a valle del campionamento si è ottenuto il segnale $x_n=1+\frac{1}{4}\delta_n$. Lo stesso risultato si ottiene banalmente campionando $x(t)=\left[\frac{\sin(\pi t)}{2\pi t}\right]^2+\cos(2\pi t)$ a passo $T=1$:

$$x(n)=\left[\frac{\sin(\pi n)}{2\pi n}\right]^2+\cos(2\pi n)=1+\frac{1}{4}\delta_n$$

Quindi la DFT dei primi 10 campioni vale:

$$X_k=10\delta_k+\frac{1}{4}$$

ESERCIZIO 3

a – La funzione di autocorrelazione avrà la seguente forma generale:

$$R_x(\tau) = \sigma_x^2 \frac{\sin 5\pi\tau}{5\pi\tau} + |m_x|^2$$

Dalla densità di probabilità delle ampiezze si ricava che:

$$E[x^2] = \frac{1}{4}\int_{-1}^{3} a^2 da = \frac{1}{4} \cdot \frac{a^3}{3}\Bigg|_{-1}^{3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{28}{3} = \frac{7}{3}$$

$$m_x = 1$$

$$\sigma_x^2 = E[x^2] - m_x^2 = \frac{4}{3}$$

Quindi:

$$R_x(\tau) = \frac{4}{3}\frac{\sin 5\pi\tau}{5\pi\tau} + 1$$

b - Campionando il processo casuale si ottiene:

$$R_x[m] = \frac{4}{3}\frac{\sin 5\pi m}{5\pi m} + 1 = \frac{4}{3}\delta_m + 1$$

Dunque:

$$\rho_x[m] = \frac{C_x[m]}{\sigma_x^2} = \frac{R_x[m] - m_x^2}{\sigma_x^2} = \delta_m \text{ e quindi } \rho_x[1] = 0$$

c - Il processo casuale y_n si ottiene come: $y_n = x_n * (\delta_n - \delta_{n-1})$

$$R_y[m] = R_x[m] * h_m * h_{-m} = \left(\frac{4}{3}\delta_m + 1\right) * (2\delta_m - \delta_{m-1} - \delta_{m+1}) = \frac{8}{3}\delta_m - \frac{4}{3}\delta_{m-1} - \frac{4}{3}\delta_{m+1}$$