SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI (Prati)
appello del 11 Febbraio 2013

La prima parte degli esercizi presenta una difficolta' minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficolta' nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficolta'.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova e' 2h e 00min.

ESERCIZIO 1

Si consideri il segnale $x(t)=\frac{\sin \pi B(t-\tau)}{\pi(t-\tau)}\cos^2\left(2\pi f_o(t-\tau)\right)$

a [6] - Si calcoli l'espressione della sua trasformata di Fourier.
b [6] - Si calcoli il valore della sua energia quando $f_o = B$.

ESERCIZIO 2

Sia dato il segnale tempo continuo $x(t)=\cos^2(2\pi f_o t+\vartheta)$ che viene campionato con frequenza di campionamento $f_s = 2f_o$.

a [4] – Si calcoli la trasformata di Fourier del segnale $x(t)$.
b [4] – Si calcoli la trasformata di Fourier del segnale campionato x_n.
c [4] – Si trovi l'espressione della DFT dei primi 100 campioni di x_n.

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale gaussiano stazionario $x(t)$ con coefficiente di correlazione $\rho_x(\tau)=\frac{\sin \pi 3\tau}{\pi 3\tau}$, varianza $\sigma_x^2 = 4$ e potenza $P_x = 10$.

a [6] – Si trovino le espressione della densità spettrale di potenza del processo dato.

b [6] – Si calcoli la potenza de processo casuale ottenuto filtrando il processo dato con il sistema LTI che ha la seguente risposta in frequenza: $H(f) = j \cdot f$.

TELECOMUNICAZIONI appello del 11 Febbraio 2013

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a – La trasformata di Fourier di $x(t) = \frac{\sin \pi B(t-\tau)}{\pi(t-\tau)} \cos^2(2\pi f_o(t-\tau))$ è data dalla trasformata di $\hat{x}(t) = \frac{\sin \pi B t}{\pi t} \cos^2(2\pi f_o t)$ moltiplicata per $\exp\{-j2\pi f \tau\}$ (effetto del ritardo nel tempo).

$$\hat{X}(f) = \frac{1}{2} rect\left(\frac{f}{B}\right) * \left\{\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{4}\delta(f-2f_o) + \frac{1}{4}\delta(f+2f_o)\right\}$$

Dunque:

$$X(f) = \left\{\frac{1}{2} rect\left(\frac{f}{B}\right) + \frac{1}{4} rect\left(\frac{f-2f_o}{B}\right) + \frac{1}{4} rect\left(\frac{f+2f_o}{B}\right)\right\} \exp\{-j2\pi f \tau\}$$

b - Il valore dell'energia di $x(t)$ quando $f_o = B$ vale:

$$E_{x(t)} = \int \left\{\frac{1}{2} rect\left(\frac{f}{B}\right) + \frac{1}{4} rect\left(\frac{f-2B}{B}\right) + \frac{1}{4} rect\left(\frac{f+2B}{B}\right)\right\}^2 df = \frac{B}{4} + \frac{B}{16} + \frac{B}{16} = \frac{3B}{8}$$

ESERCIZIO 2

a - La trasformata di Fourier del segnale dato è:

$$X(f) = \left\{\frac{1}{2}\left[\delta(f+f_o)e^{-j\vartheta} + \delta(f-f_o)e^{j\vartheta}\right]\right\} * \left\{\frac{1}{2}\left[\delta(f+f_o)e^{-j\vartheta} + \delta(f-f_o)e^{j\vartheta}\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{4}e^{-j2\vartheta}\delta(f+2f_o) + \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{4}e^{j2\vartheta}\delta(f-2f_o)$$

b – Campionando con frequenza di campionamento $f_s = 2f_o$ s'introduce alias in frequenza ottenendo la seguente trasformata di Fourier:

$$X_c(f) = 2f_o \cdot \left[\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{4}e^{-j2\vartheta}\delta(f) + \frac{1}{4}e^{j2\vartheta}\delta(f)\right] = 2f_o\cos^2(\vartheta)\delta(f) \text{ periodica di periodo } 2f_o$$

Dunque il segnale discreto è una costante $x_n = \cos^2(\vartheta)$ come, peraltro, si ricava immediatamente sostituendo al tempo continuo quello discreto:

$$x_n = x(nT) = \cos^2\left(2\pi f_o \frac{n}{2f_o} + \vartheta\right) = \cos^2(\pi n + \vartheta) = \cos^2(\vartheta)$$

c – La DFT dei primi 100 campioni di x_n è dunque: $X_k = 100\cos^2(\vartheta)\delta_k$

ESERCIZIO 3

a – Dai dati del problema:

$$C_x(\tau) = \sigma_x^2\rho_x(\tau) = 4\frac{\sin \pi 3\tau}{\pi 3\tau}$$

$$R_x(\tau) = 4\frac{\sin \pi 3\tau}{\pi 3\tau} + 6 \text{ dato che } P_x = R_x(0) = 10$$

Dunque la densità spettrale di potenza del processo vale:

$$S_x(f) = \frac{4}{3}rect\left(\frac{f}{3}\right) + 6\delta(f)$$

b - Conviene calcolare la densità spettrale di potenza del processo in uscita e poi integrare.

La densità spettrale di potenza può essere calcolata utilizzando la nota formula $S_y(f) = S_x(f)|H(f)|^2$.

$$S_y(f) = S_x(f)|H(f)|^2 = \left[\frac{4}{3}rect\left(\frac{f}{3}\right) + 6\delta(f)\right]\cdot f^2$$

Il calcolo della potenza del processo in uscita è semplice:

$$P_y = \int S_y(f)df = \frac{4}{3}\int_{-3/2}^{3/2} f^2 df = \frac{4}{3}\cdot\frac{27}{12} = 3$$