SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI (Prati) - 9 Febbraio 2017

Il tempo massimo per lo svolgimento della prova è di 2h.

ESERCIZIO 1

Sia dato un sistema LTI con risposta in frequenza $H(f) = 10 rect\left(\frac{f}{10}\right) \exp\{-j10\pi f\}$. Il segnale d'ingresso ha la seguente espressione: $x(t) = \frac{\sin \pi 50 t}{\pi t} \exp\{j 2\pi f_o t\}$.

a - Si traccino i grafici di modulo e fase della risposta in frequenza *H(f)*.

b - Si calcoli l'espressione dell'uscita *y(t)* del sistema dato nei seguenti casi: 1) $0 < f_o < 20$ e 2) $f_o > 30$.

ESERCIZIO 2

Sia data la sequenza $x_n = \frac{1}{4}\delta_{n+1} + \frac{1}{2}\delta_n + \frac{1}{4}\delta_{n-1}$ e zero altrove.

a - Si tracci il grafico della trasformata di Fourier $\widetilde{X}(f)$ della sequenza x_n.

b – Si calcoli l'espressione della DFT di 10 campioni di x_n.

c – Si calcoli l'espressione del segnale tempo continuo *x(t)* dal quale e' stata ottenuta la sequenza x_n tramite campionamento a passo T.

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale continuo *x(t)* stazionario con potenza *P=25*, densità di probabilità delle ampiezze uniforme e autocorrelazione $R_x(\tau) = 16 + A \frac{\sin \frac{\pi t}{5}}{\pi t}$.

a - Si calcoli il valore di A.

b – Si calcolino l' autocorrelazione e la densità di probabilità delle ampiezze del processo casuale discreto $x_n = x(nT)$ ottenuto campionando il processo continuo *x(t)* a passo $T = 15$ secondi.

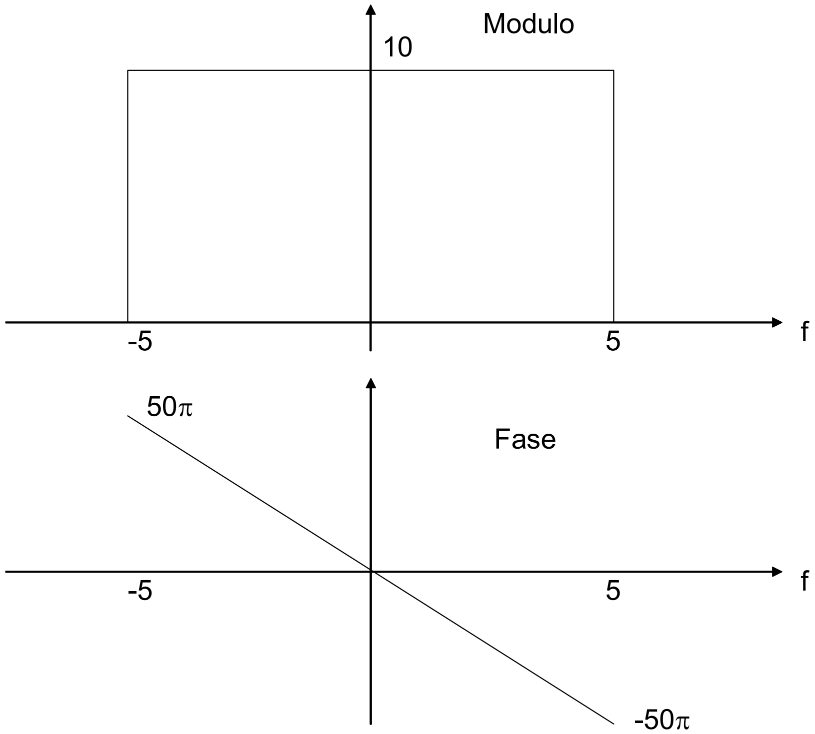
c – Il processo casuale x_n è filtrato mediandone 3 campioni consecutivi $y_n = \frac{1}{3}(x_n + x_{n+1} + x_{n+2})$. Quanto valgono media e varianza del processo filtrato y_n?

TELECOMUNICAZIONI (Prati) - 9 Febbraio 2017

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a - Modulo e fase della risposta in frequenza sono riportati in figura.



b - Il segnale *x(t)*, ha trasformata di Fourier di *X(f)* rettangolare a fase nulla di banda 50Hz centrata intorno alla frequenza f_o. Le frequenze estreme di *X(f)* sono dunque $f_1 = f_o - 25$ e $f_2 = f_o + 25$. Fintanto che la banda del segnale d'ingresso e' totalmente compresa nella banda di *H(f),* la trasformata dell'uscita è *Y(f)=H(f)* e quindi *y(t)=h(t).* Ciò avviene per $0 < f_o < 20$.

$$y(t) = h(t) = 10\frac{\sin \pi 10(t-5)}{\pi(t-5)}$$

Invece, quando $f_o > 30$, la bande di *H(f)* e *X(f)* sono disgiunte e l'uscita e' nulla.

ESERCIZIO 2

a - La trasformata di Fourier della sequenza è per definizione periodica di periodo 1 e vale:

$$\widetilde{X}(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_n\exp\{-j2\pi fn\}=\frac{1}{4}\exp\{j2\pi f\}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\exp\{-j2\pi f\}=\frac{1}{2}(1+\cos 2\pi f)$$

b - La DFT della sequenza x_n si può calcolare direttamente dal risultato precedente:

$$X_k=\widetilde{X}(f)\Big|_{f=\frac{k}{10}}=\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{2\pi k}{10}\right)\ \text{con}\ 0\leq k\leq 9$$

Oppure si può utilizzare la definizione di DFT, ma stando attenti al formato della sequenza d'ingresso che deve essere circolare di 10 campioni e considerata da n=0 a n=9.

$$X_k=\sum_{n=0}^{9}\left(\frac{1}{2}\delta_n+\frac{1}{4}\delta_{n-1}+\frac{1}{4}\delta_{n-9}\right)\exp\left\{-j2\pi\frac{nk}{10}\right\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\exp\left\{-j2\pi\frac{k}{10}\right\}+\frac{1}{4}\exp\left\{-j2\pi\frac{9k}{10}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\exp\left\{-j2\pi\frac{k}{10}\right\}+\frac{1}{4}\exp\left\{+j2\pi\frac{k}{10}\right\}$$

c - Il segnale tempo-continuo $x(t)$ si ottiene convolvendo il segnale campionato idealmente $x_c(t)$ con la risposta all'impulso del filtro di ricostruzione:

$$x(t)=x_c(t)*h_R(t)=\left[\frac{1}{4}\delta(t+T)+\frac{1}{2}\delta(t)+\frac{1}{4}\delta(t-T)\right]*\frac{\sin\pi\frac{t}{T}}{\pi\frac{t}{T}}=\frac{1}{4}\frac{\sin\pi\frac{(t+T)}{T}}{\pi\frac{(t+T)}{T}}+\frac{1}{2}\frac{\sin\pi\frac{t}{T}}{\pi\frac{t}{T}}+\frac{1}{4}\frac{\sin\pi\frac{(t-T)}{T}}{\pi\frac{(t-T)}{T}}$$

ESERCIZIO 3

a – La costante **A** si trova immediatamente sapendo che la potenza è uguale all'autocorrelazione del processo in 0:

$$P=25=R_x(0)=16+\frac{A}{5}$$

$$A=45$$

b - L'autocorrelazione del processo casuale discreto si ottiene direttamente dal campionamento dell'autocorrelazione del processo continuo:

$$R_x[m]=16+45\frac{\sin\frac{\pi mT}{5}}{\pi mT}=16+45\frac{\sin\frac{\pi m15}{5}}{\pi m15}=16+3\frac{\sin 3\pi m}{\pi m}=16+9\delta_m$$

Il valor medio è dato dalla radice quadrata della parte costante dell'autocorrelazione:

$$m_x=\sqrt{16}=\pm 4$$

La varianza di una variabile casuale distribuita uniformemente $\sigma_x^2 = \frac{\Delta^2}{12} = 9$; quindi

$\Delta = \sqrt{9 \cdot 12} = 6\sqrt{3}$

Le 2 possibili densità di probabilità delle ampiezze del processo valgono dunque $\frac{1}{6\sqrt{3}}$ nell'intervallo compreso tra $\pm 4 - 3\sqrt{3}$ e $\pm 4 + 3\sqrt{3}$.

c - I campioni del processo discreto x_n sono tra loro incorrelati. Dunque:

$m_y = m_x = \sqrt{16} = \pm 4$

$\sigma_y^2 = \frac{1}{9} 3\sigma_x^2 = \frac{1}{3}\sigma_x^2 = 3$