Segnali per le comunicazioni – Appello del 5/2/2021

Esercizio 1

Sia dato il segnale $x(t) = \left[\frac{\sin(2\pi t)}{\pi t}\right]^2 * \frac{\sin(6\pi t)}{\pi t}$ dove $*$ indica la convoluzione.

A) Si trovi l'espressione della trasformata di Fourier $X(f)$ e se ne tracci il grafico.

B) Si campioni $x(t)$ con frequenza di campionamento $f_s = 3$ ottenendo il segnale discreto x_n.
Si tracci il grafico della trasformata di Fourier $\tilde{X}(f)$ del segnale discreto e quella del segnale tempo continuo ricostruito $X_R(f)$.

C) (*facoltativo*) Quanto vale l'energia del segnale ricostruito?

Soluzione Esercizio 1 del 5/2/2021

Sia dato il segnale $x(t) = \left[\frac{\sin(2\pi t)}{\pi t}\right]^2 * \frac{\sin(6\pi\ )}{\pi t}$ dove $*$ indica la convoluzione.

A) Si trovi l'espressione della trasformata di Fourier $X(f)$ e se ne tracci il grafico.

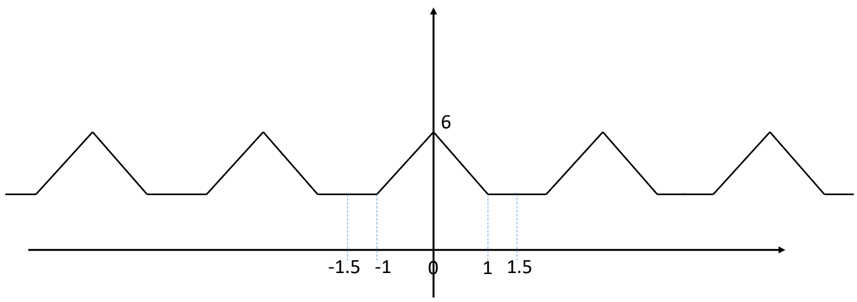
$$X(f) = \left[rect\left(\frac{f}{2}\right) * rect\left(\frac{f}{2}\right)\right] \cdot rect\left(\frac{f}{6}\right)$$

Il grafico è dato da un triangolo centrato nell'origine, di altezza 2 e banda compresa tra -2 e 2, moltiplicato per un rettangolo di altezza unitaria e banda compresa tra -3 e 3. Da qui si vede che l'effetto della moltiplicazione per il rettangolo è nullo e che la trasformata è costituita dal solo triangolo di altezza 2 e banda compresa tra -2 e 2:

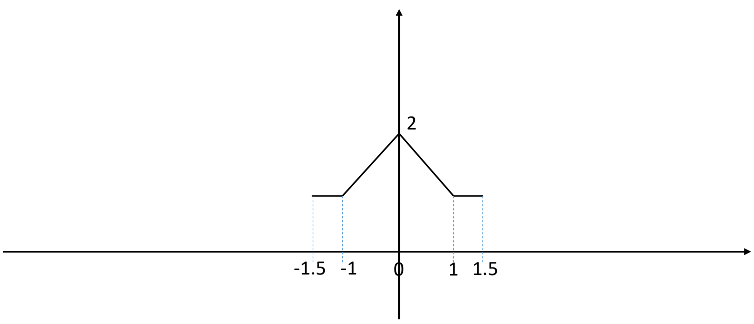
$$X(f) = \left[rect\left(\frac{f}{2}\right) * rect\left(\frac{f}{2}\right)\right] = 2 \cdot tri\left(\frac{f}{2}\right)$$

D) Si campioni $x(t)$ con frequenza di campionamento $f_s = 3$ ottenendo il segnale discreto x_n.
Si tracci il grafico della trasformata di Fourier $\tilde{X}(f)$ del segnale discreto e quella del segnale tempo continuo $X_R(f)$.

$\tilde{X}(f) = 3\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2 \cdot tri\left(\frac{f-3k}{2}\right)$ il cui grafico è:



$X_R(f) = \tilde{X}(f) \cdot \frac{1}{3} rect\left(\frac{f}{3}\right)$ il cui grafico è:



$$Ex_R = \frac{17}{3}$$

Segnali per le comunicazioni – Appello del 5/2/2021

Esercizio 2

Sia dato il processo casuale stazionario tempo discreto x_n con densità di probabilità delle ampiezze uniforme e valor medio unitario. Sapendo che la densità spettrale di potenza del processo ha la seguente espressione:

$$S_x(\varphi) = \frac{2}{3} rect(2\varphi) + \delta(\varphi)$$

A) Si dicano quali sono i valori minimi e massimo che possono assumere i campioni del processo x_n.

B) Si trovi la potenza del processo $y_n = x_{n+1} - x_{n+3} + x_{n+5}$.

<u>Soluzione</u> <u>Esercizio 2 del 5/2/2020</u>

Sia dato il processo casuale stazionario tempo discreto x_n con densità di probabilità delle ampiezze uniforme e valor medio unitario. Sapendo che la densità spettrale di potenza del processo ha la seguente espressione:

$$S_x(\varphi) = \frac{2}{3} rect(2\varphi) + \delta(\varphi)$$

A) Si trovi l'espressione dell'autocorrelazione del processo x_n e si dicano quali sono i valori minimo e massimo che possono assumere i campioni del processo x_n.

Anti-trasformando $S_x(\varphi) = \frac{2}{3} rect(2\varphi) + \delta(\varphi)$, si trova:

$$R_x[m] = \frac{2\sin\left(\pi\, ^{n}/_{2}\right)}{3\pi n} + 1$$

La varianza del processo è data dal valore da $\sigma_x^2 = C_x[0] = R_x[0] - 1 = \frac{1}{3}$.

La varianza di una densità di probabilità uniforme è data da $\sigma_x^2 = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{1}{3}$.

Da qui $\Delta = 2$, ed essendo il valor medio 1, la densità di probabilità uniforme si estende da 0 a 2 e dunque il minimo delle ampiezze vale 0 e il massimo 2.

B) Si trovi la potenza del processo $y_n = x_{n+1} - x_{n+3} + x_{n+5}$.

Data la forma dell'auto-covarianza si nota che i 3 campioni sono a distanza multiplo intero di 2 e sono incorrelati e quindi la varianza della somma (o della differenza) è uguale alla somma delle varianze. Il valor medio di y_n è uguale al valor medio di x_n .

La potenza di y_n è data da:

$$P_y = \sigma_y^2 + m_y^2 = 3\frac{1}{3} + 1 = 2$$