TELECOMUNICAZIONI quinto appello - 5 Febbraio 2018

La difficolta' delle domande dei singoli esercizi è in ordine crescente: se s'incontrano difficolta' nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova è 2h.

ESERCIZIO 1

Sia dato un sistema LTI ideale con risposta in frequenza $H(f) = j2\pi f \cdot rect(f)$.
All'ingresso del sistema dato si pone il segnale: $x(t) = \dfrac{\sin \pi t}{\pi t}$.

a - Si traccino i grafici di modulo e fase della risposta in frequenza data *H(f)*.

b - Si calcoli l'espressione della Trasformata di Fourier $Y(f)$ dell'uscita *y(t)* del sistema dato.

c - Si calcoli l'espressione dell'uscita *y(t)* del sistema dato (*suggerimento: evitare lunghi complicati calcoli, ma utilizzare esclusivamente le proprietà della trasformata di Fourier*)

ESERCIZIO 2

Il segnale $x(t) = \cos(2\pi f_o t)$ viene campionato con intervallo di campionamento *T* uguale a 5 volte il massimo intervallo di campionamento necessario ad evitare alias in frequenza, ottenendo la sequenza x_n.

a - Si trovi il valore dell'intervallo di campionamento *T*.

b – Si disegni il grafico dei primi 10 campioni di x_n.

c – Si traccino i grafici della trasformata di Fourier della sequenza x_n in frequenza e in frequenza normalizzata (*suggerimento: può essere più agevole procedere direttamente per via grafica piuttosto che per via analitica)* .

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale continuo *x(t)* stazionario con potenza *P=17*, densità di probabilità delle ampiezze gaussiana e autocovarianza $C_x(\tau) = \begin{cases} 1-|\tau| & se \quad |\tau|<1 \\ 0 & altrove \end{cases}$.

a - Si scriva l'espressione della densità di probabilità delle ampiezze del processo dato sapendo che i valori positivi sono piu' probabili di quelli negativi.

b – Il processo casuale viene filtrato con un filtro la cui risposta all'impulso è un rettangolo di ampiezza unitaria e durata 4 secondi. Dopo quanto tempo le ampiezze del processo filtrato diventano tra loro indipendenti?

TELECOMUNICAZIONI quinto appello - 5 Febbraio 2018

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a - La risposta in frequenza è puramente immaginaria ed è limitata in frequenza dal rettangolo tra -1/2 e +1/2 Hz. Il modulo aumenta linearmente con la frequenza tra 0 e π, la fase vale +π/2 tra 0 e +1/2Hz e –π/2 tra 0 e -1/2Hz.

b - La trasformata *X(f)* del segnale *x(t)* è un rettangolo centrato nell'origine di banda bilatera unitaria e quindi completamente contenuta nel rettangolo di banda bilatera unitaria della risposta in frequenza data. La trasformata dell'uscita vale dunque:

$$Y(f) = X(f)H(f) = rect(f) \cdot j2\pi f \cdot rect(f) = j2\pi f \cdot rect(f) = j2\pi f \cdot X(f)$$

c - Dalla nota proprietà della trasformata di Fourier, il segnale d'uscita *y(t)* è la derivata prima di quello d'ingresso *x(t):*

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{-\pi \sin \pi t + \pi^2 t \cdot \cos(\pi t)}{\pi^2 t^2}$$

ESERCIZIO 2

a - La frequenza massima del segnale e' f_o quindi la minima frequenza di campionamento e' $2\,f_o$.

L'intervallo di campionamento da utilizzare vale $T = \dfrac{5}{2f_o}$.

b - La sequenza ottenuta dal campionamento del segnale dato ha la seguente espressione:

$$x(nT) = \cos\left(2\pi f_o \frac{5n}{2f_o}\right) = \cos\left(2\pi \frac{5}{2} n\right) = \cos\left(2\pi \frac{1}{2} n\right) = (-1)^n$$

c - La trasformata della sequenza data si ricava immediatamente da quella del segnale tempo continuo.

$$X(f) = \frac{1}{2}\delta(f + f_o) + \frac{1}{2}\delta(f - f_o)$$

$$\widetilde{X}(f) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{k}{T}\right) = \frac{1}{5} f_o \delta(f + f_o) + \frac{1}{5} f_o \delta(f - f_o) =$$
$$= \frac{1}{5} f_o \delta\left(f + \frac{f_o}{5}\right) + \frac{1}{5} f_o \delta\left(f - \frac{f_o}{5}\right) = \frac{2}{5} f_o \delta\left(f - \frac{f_o}{5}\right)$$

periodica di periodo $f_s = \dfrac{2f_o}{5}$

Equivalentemente, in frequenza normalizzata abbiamo (ricordando che $\phi = fT$):

$$X(\phi) = \tilde{X}\left(\frac{2}{5}f_o\phi\right) = \frac{1}{5}f_o\delta\left(\frac{2}{5}f_o\phi + f_o\right) + \frac{1}{5}f_o\delta\left(\frac{2}{5}f_o\phi - f_o\right) =$$
$$= \frac{1}{5}f_o\delta\left(\frac{2}{5}f_o\left(\phi + \frac{5}{2}\right)\right) + \frac{1}{5}f_o\delta\left(\frac{2}{5}f_o\left(\phi - \frac{5}{2}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\delta\left(\left(\phi + \frac{5}{2}\right)\right) + \frac{1}{2}\delta\left(\left(\phi - \frac{5}{2}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\delta\left(\left(\phi + \frac{1}{2}\right)\right) + \frac{1}{2}\delta\left(\left(\phi - \frac{1}{2}\right)\right) = \delta\left(\left(\phi - \frac{1}{2}\right)\right)$$

di periodo unitario

Oppure, direttamente dalla definizione:

$$X(\phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos\left(2\pi\frac{1}{2}n\right)\exp\{-j2\pi\phi n\} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left\{-j2\pi\left(\phi - \frac{1}{2}\right)n\right\} + \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left\{-j2\pi\left(\phi + \frac{1}{2}\right)n\right\} =$$
$$= \frac{j}{2}\delta\left(\phi + \frac{1}{2}\right) - \frac{j}{2}\delta\left(\phi - \frac{1}{2}\right)$$

di periodo unitario.

ESERCIZIO 3

a – La densita' delle ampiezze è gaussiana quindi è sufficiente ricavare il valore medio e la varianza dai dati del problema**.**
La varianza è unitaria perchè coincide con il valore dell'autocovarianza in 0. Il modulo del valor medio si trova sapendo che la potenza è data dalla varianza piu' il valor medio al quadrato. Il segno del valor medio è positivo visto che i valori negativi sono piu' probabili di quelli positivi.

$$m_x = 4$$
$$\sigma_x^2 = 1$$

$$p_x(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(a-4)^2}{2}\right\}$$

b - Le ampiezze del processo filtrato sono ancora gaussiane e quindi se incorrelate sono anche indipendenti. I valori delle ampiezze diventano indipendenti quando l'autocovarianza si annulla. L'autocovarianza dell'uscita si ricava dall'autocorrelazione meno il valor medio al quadrato.

L'autocorrelazione dell'uscita vale:

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$$

dove $R_x(\tau)=C_x(\tau)+16$ e $h(\tau)*h(-\tau)$ è un triangolo centrato nell'origine di base 8 e altezza 4.

Quindi:

$$C_y(\tau)=[C_x(\tau)*h(\tau)*h(-\tau)]+[16*h(\tau)*h(-\tau)]-m_y^2$$

Il valor medio dell'uscita vale $m_y = m_x \cdot \int h(t)dt = 4 \cdot 4 = 16$

Inoltre la convoluzione per la costante 16 è ancora una costante che vale $[16*h(\tau)*h(-\tau)]=256$.

Quindi il calcolo dell'autocovarianza dell'uscita si riduce a:

$$C_y(\tau)=[C_x(\tau)*h(\tau)*h(-\tau)]$$

A noi interessa sapere solo da quale valore di t in poi l'autocovarianza è nulla. Da una nota proprieta' della convoluzione si puo' dire che la durata del segnale convoluto è uguale alla somma delle durate dei due segnali che nel nostro caso vale: 2+8=10. Il tempo di decorrelazione è quindi 5 secondi.