SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI quinto appello – 4 Febbraio 2016

Il tempo massimo per lo svolgimento della prova è 2h.

ESERCIZIO 1

Sia dato un sistema LTI con risposta in frequenza $H(f)$ il cui modulo è costante unitario nella banda $-15 < f < 15$ e nullo altrove, la cui fase vale $3\pi f$ nella stessa banda.

a - Si traccino i grafici di modulo e fase della risposta in frequenza *H(f)*.

b - Si calcoli l'espressione dell'uscita $y(t)$ del sistema dato quando all'ingresso si pone il segnale $x(t) = \dfrac{\sin \pi 50(t-1)}{\pi(t-1)}$

c - Si calcoli il valore dell'energia dell'uscita $y(t)$.

ESERCIZIO 2

Il segnale tempo continuo dato dalla convoluzione $x(t) = rect(t) * rect(t-1)$ viene campionato con frequenza di campionamento $f_s = 2\,\text{Hz}$ ottenendo il segnale discreto x_n.

a - Si tracci il grafico di $x(t)$ e si ricavi l'espressione della sequenza x_n.

b - Si ricavi l'espressione della trasformata di Fourier $\tilde{X}(f)$ e della trasformata di Fourier in frequenza normalizzata $\tilde{X}(\phi)$ del segnale discreto x_n.

c – Si calcoli l'espressione della DFT di 10 campioni di x_n.

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale gaussiano continuo $x(t)$ stazionario con potenza *P=17* e autocorrelazione

$$R_x(\tau) = 16 + K\frac{\sin 2\pi\tau}{\pi\tau}.$$

a - Si calcoli il valore di *K*.

b – Il processo casuale $x(t)$ viene campionato con frequenza di campionamento $f_s = 4\,\text{Hz}$ ottenendo il processo casuale discreto x_n. Si calcoli l'autocorrelazione del processo casuale discreto y_n ottenuto considerando solo i campioni di posizione pari di x_n.

c - Si calcoli l'autocorrelazione del processo casuale discreto z_n ottenuto dalla media aritmetica di 2 campioni consecutivi di y_n.

SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI quinto appello – 4 Febbraio 2016

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a – Il grafico del modulo è un rettangolo di base 30, simmetrico rispetto all'origine e di altezza unitaria. Il grafico della fase è una retta passante per l'origine che vale $\mp 45\pi$ alle frequenze $\mp 15\,\text{Hz}$ che rappresentano gli estremi della banda.

b - La trasformata di $x(t) = \dfrac{\sin \pi 50(t-1)}{\pi(t-1)}$ è costante nella banda $\mp 25\,\text{Hz}$ con fase lineare negativa $-2\pi f$. La trasformata dell'uscita è quindi:

$$Y(f) = X(f)H(f) = rect\left(\frac{f}{30}\right)\exp\{j3\pi f\}\exp\{-j2\pi f\} = rect\left(\frac{f}{30}\right)\exp\{j\pi f\}$$

L'uscita del sistema ha la seguente espressione:

$$y(t) = \frac{\sin \pi 30\left(t + \frac{1}{2}\right)}{\pi\left(t + \frac{1}{2}\right)}$$

c – L'energia dell'uscita si calcola immediatamente nel dominio della frequenza e vale:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |Y(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} \left| rect\left(\frac{f}{30}\right)\exp\{j\pi f\}\right|^2 df = \int_{-15}^{15} |\exp\{j\pi f\}|^2 df = 30$$

ESERCIZIO 2

a - Il segnale $x(t)=rect(t)*rect(t-1)$ è un triangolo isoscele con base 2 nell'intervallo $0<t<2$.
Campionando con $T=\frac{1}{2}$ si ottengono solo 3 campioni diversi da zero: $x_n=\frac{1}{2}\delta_{n-1}+\delta_{n-2}+\frac{1}{2}\delta_{n-3}$.

b - La trasformata di Fourier della sequenza è per definizione:

$$\tilde{X}(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_n\exp\{-j2\pi fnT\}=\sum_{n=1}^{3}x_n\exp\{-j\pi fn\}=\frac{1}{2}\exp\{-j\pi f\}+\exp\{-j2\pi f\}+\frac{1}{2}\exp\{-j3\pi f\}$$ periodica di periodo 2

La trasformata di Fourier in frequenza normalizzata è per definizione:

$$\tilde{X}(\phi)=\tilde{X}(fT)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_n\exp\{-j2\pi\phi n\}=\sum_{n=1}^{3}x_n\exp\{-j2\pi\phi n\}=\frac{1}{2}\exp\{-j2\pi\phi\}+\exp\{-j4\pi\phi\}+\frac{1}{2}\exp\{-j6\pi\phi\}$$

periodica di periodo 1

c - La DFT della sequenza x_n si puo' calcolare direttamente dal risultato precedente:

$$X_k=\tilde{X}(f)\Big|_{f=\frac{k}{NT}}=\tilde{X}(f)\Big|_{f=\frac{k}{5}}=\frac{1}{2}\exp\left\{-j\pi\frac{k}{5}\right\}+\exp\left\{-j2\pi\frac{k}{5}\right\}+\frac{1}{2}\exp\left\{-j3\pi\frac{k}{5}\right\}\ \text{con}\ 0\le k\le 9$$

Oppure in frequenza normalizzata:

$$X_k=\tilde{X}(\phi)\Big|_{\phi=\frac{k}{N}}=\tilde{X}(\phi)\Big|_{\phi=\frac{k}{10}}=\frac{1}{2}\exp\left\{-j\pi\frac{k}{5}\right\}+\exp\left\{-j2\pi\frac{k}{5}\right\}+\frac{1}{2}\exp\left\{-j3\pi\frac{k}{5}\right\}\ \text{con}\ 0\le k\le 9$$

Oppure si può utilizzare direttamente la definizione di DFT:

$$X_k=\sum_{n=0}^{9}\left(\frac{1}{2}\delta_{n-1}+\delta_{n-2}+\frac{1}{2}\delta_{n-3}\right)\exp\left\{-j2\pi\frac{nk}{10}\right\}=\frac{1}{2}\exp\left\{-j2\pi\frac{k}{10}\right\}+\exp\left\{-j2\pi\frac{2k}{10}\right\}+\frac{1}{2}\exp\left\{-j2\pi\frac{3k}{10}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\exp\left\{-j\pi\frac{k}{5}\right\}+\exp\left\{-j2\pi\frac{k}{5}\right\}+\frac{1}{2}\exp\left\{-j3\pi\frac{k}{5}\right\}$$

ESERCIZIO 3

a – La costante **K** si trova immediatamente sapendo che la potenza è uguale all'autocorrelazione del processo in 0:

$$P = 17 = R_x(0) = 16 + 2k$$

$$K = \frac{1}{2}$$

b - L'autocorrelazione del processo casuale discreto si ottiene direttamente dal campionamento dell'autocorrelazione del processo continuo:

$$R_x[m] = 16 + 2\frac{\sin \pi m/2}{\pi m}$$

Se si considerano solo i campioni di posizione pari di x_n, ciò equivale a considerare il processo casuale $y_n = x_{2n}$.

L'autocorrelazione di $y_n = x_{2n}$ può essere espressa in funzione di quella di x_n con una semplice sostituzione:

$$R_y[m] = E[y_n y_{n+m}] = E[x_{2n} x_{2(n+m)}] = R_x[2m]$$

Da qui:

$$R_y[m] = R_x[2m] = 16 + 2\frac{\sin \pi 2m/2}{\pi 2m} = 16 + \delta_m$$

c - Il processo casuale z_n può essere scritto come uscita di un sistema LTI con $h_n = \frac{1}{2}\delta_n + \frac{1}{2}\delta_{n-1}$ alimentato da y_n.

L'autocorrelazione del processo z_n si ottiene come:

$$R_z[m] = R_y[m] * h_m * h_{-m} = (\delta_m + 16) * \left(\frac{1}{2}\delta_m + \frac{1}{4}\delta_{m-1} + \frac{1}{4}\delta_{m+1}\right) = \frac{1}{2}\delta_m + \frac{1}{4}\delta_{m-1} + \frac{1}{4}\delta_{m+1} + 16$$