SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI (Prati)
appello del 3 febbraio 2020

La prima parte degli esercizi presenta una difficoltà minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficoltà nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficoltà.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova è 1h e 30min.

ESERCIZIO 1

Sia dato un sistema LTI con risposta in frequenza $H(f)=\dfrac{\sin(20\pi(f-1))}{\pi(f-1)}$.

a - Si trovi la risposta all'impulso *h(t)* e se ne tracci il grafico.
b - Il segnale d'ingresso *x(t)* ha la seguente trasformata di Fourier $X(f)=\delta(f)+\delta(f-1)+\delta(f+3)$.
Si calcoli l'espressione dell'uscita *y(t)* del sistema dato.

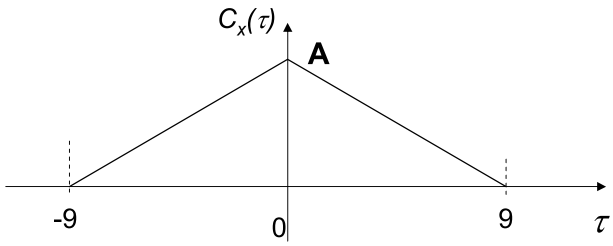
ESERCIZIO 2

Sia dato il segnale tempo-continuo $x(t)=\cos\left(\dfrac{2\pi t}{T}\right)-\dfrac{1}{2}$. Il segnale *x(t)* viene campionato a passo T secondi ottenendo la sequenza x_n.

a - Si trovi la trasformata di Fourier *X(f)* del segnale tempo-continuo *x(t)*
b – Si trovi la trasformata di Fourier $\widetilde{X}(f)$ della sequenza x_n.
c – Si trovi la trasformata di Fourier in frequenza normalizzata $\widetilde{X}(\phi)$ della sequenza x_n.
d – Si calcoli l'espressione della DFT di 100 campioni di x_n con $0 \le n \le 99$.

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale continuo *x(t)* stazionario con densità di probabilità delle ampiezze uniforme nell'intervallo -3, 3 e autocovarianza triangolare mostrata in figura.



a - Si calcoli il valore di **A**.
b – Si calcoli l'autocorrelazione e la densità spettrale di potenza del processo casuale *y(t)=x(t)+x(t-9)*.

TELECOMUNICAZIONI – 2 Febbraio 2020

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a - La risposta all'impulso *h(t)* è un rettangolo di ampiezza unitaria nell'intervallo $-10 \le t \le 10$ e fase lineare $2\pi t$ nella stessa banda.

b - Nelle frequenze abbiamo:

$$Y(f) = X(f)H(f) = [\delta(f) + \delta(f-1) + \delta(f-2)]\frac{\sin(20\pi(f-1))}{\pi(f-1)} = 20\delta(f-1)$$

Anti-trasformando si ottiene $y(t) = 20e^{j2\pi t}$.

ESERCIZIO 2

a - La trasformata di Fourier del segnale tempo continuo $x(t)$ è:

$$X(f) = -\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{2}\delta\left(f+\frac{1}{T}\right) + \frac{1}{2}\delta\left(f-\frac{1}{T}\right)$$

b - La trasformata di Fourier della sequenza x_n è:

$\tilde{X}(f) = -\frac{1}{2T}\delta(f) + \frac{1}{2T}\delta\left(f+\frac{k}{T}\right) + \frac{1}{2T}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$ periodica in frequenza con periodo *1/T. Dunque*

$\tilde{X}(f) = \frac{1}{2T}\delta(f)$ periodica in frequenza con periodo *1/T*

c - La trasformata di Fourier in frequenza normalizzata della sequenza della sequenza x_n è:

$\tilde{X}(\phi) = \tilde{X}(fT) = \frac{1}{2T}\delta(fT) = \frac{1}{2}\delta(\phi)$ periodica in frequenza con periodo *unitario.*

d –La sequenza x_n è data da una costante uguale a ½.

$X_k = 50\delta_k$

ESERCIZIO 3

a – La costante **A** si trova immediatamente sapendo che la densità di probabilità delle ampiezze del processo casuale dato è uniforme e notando che

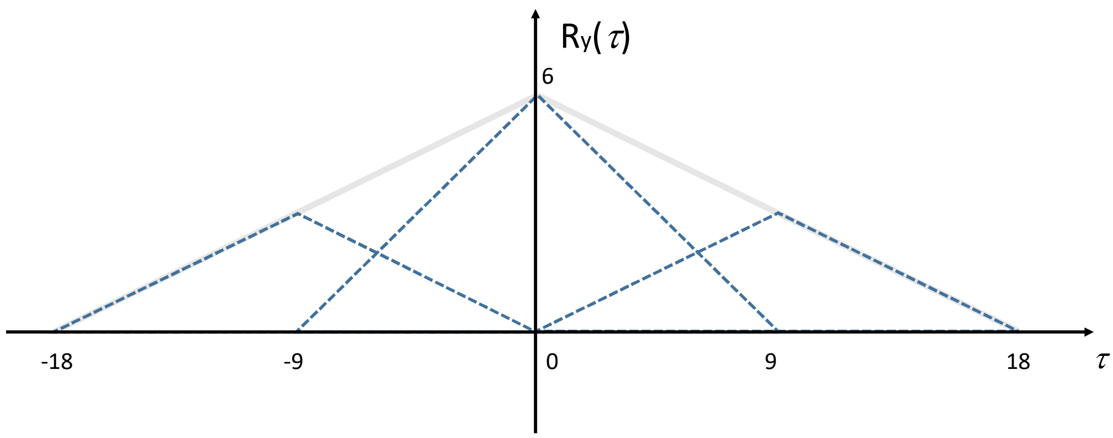
$$A = C_x(0) = \sigma_x^2 = \frac{\Delta^2}{12} = 3$$

b – L'autocorrelazione del processo casuale *y(t)* si ottiene dalla definizione:

$$R_y(\tau) = E[y(t)y(t+\tau)] = E[\{x(t) + x(t-9)\}\{x(t+\tau) + x(t-9+\tau)\}] =$$
$$E[x(t)x(t+\tau)] + E[x(t-9)x(t-9+\tau)] + E[x(t-9)x(t+\tau)] + E[x(t)x(t-9+\tau)] =$$
$$= R_x(\tau) + R_x(\tau) + R_x(\tau+9) + R_x(\tau-9) =$$
$$= 2R_x(\tau) + R_x(\tau+9) + R_x(\tau-9)$$

In alternativa si può immaginare che il processo casuale *y(t)* sia ottenuto filtrando il processo casuale *x(t)* con la risposta all'impulso $h(t) = \delta(t) + \delta(t-9)$. Valor medio e autocorrelazione si ottengono applicando le note formule dei processi casuali attraverso sistemi LTI.

L'autocorrelazione dell'uscita è un triangolo alto 6 tra -18 e +18.



Dunque la densità spettrale di potenza è:

$$S_y(f) = \frac{1}{3}\left(\frac{\sin(\pi 18 f)}{\pi f}\right)^2$$