TELECOMUNICAZIONI quinto appello (Prati) - 18 febbraio 2026

Il tempo massimo per lo svolgimento della prova e' 2h.

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema con risposta all'impulso $h(t) = \frac{\sin(2\pi B(t+\tau))}{\pi(t+\tau)} \cos(2\pi B(t-\tau))$

a - Si calcoli l'espressione analitica della risposta in frequenza $H(f)$

b- Si traccino i grafici di modulo e fase di $H(f)$

c- Si trovi l'espressione del segnale: $y(t) = h(t) * \cos(2\pi B(t+\tau))$

ESERCIZIO 2

Si campioni il segnale tempo continuo $x(t) = \frac{\sin\left(10\pi\left(t+\frac{1}{5}\right)\right)}{\pi\left(t+\frac{1}{5}\right)}$ con frequenza di campionamento $f_s = 5$ ottenendo il segnale discreto x_n.

a - Si trovi l'espressione del segnale $x_R(t)$ tempo continuo ricostruito dai campioni di x_n.

b - Qual è l'espressione delle sequenze x_n e $x_R[n]$ ottenute campionando rispettivamente il segnale $x(t)$ e il segnale $x_R(t)$ sempre con frequenza di campionamento $f_s = 5$?

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale reale $x(t)$ gaussiano con potenza $P_x = 5$ e densità spettrale di potenza

$$S_x(f) = \begin{cases} A\left(1 - \frac{|f|}{2}\right) + \delta(f) & |f| < 2 \\ 0 & |f| \geq 2 \end{cases}$$

a - Si calcoli il valore di A

b - Si campioni in processo $x(t)$ a passo $T = \frac{3}{2}$ ottenendo il processo discreto x_n. Si calcoli la potenza del processo $y_n = x_n - \frac{x_{n-1}}{2} + \frac{x_{n-2}}{2}$

TELECOMUNICAZIONI quinto appello (Prati) - 18 febbraio 2026

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a - La trasformata di Fourier:

$$H(f) = rect\left(\frac{f}{2B}\right)e^{j2\pi f\tau} * \left[\frac{1}{2}\delta(f-B)e^{-j2\pi f\tau} + \frac{1}{2}\delta(f+B)e^{-j2\pi f\tau}\right]$$

Cioè:

$$H(f) = rect\left(\frac{f}{2B}\right)e^{j2\pi f\tau} * \left[\frac{1}{2}\delta(f-B)e^{-j2\pi B\tau} + \frac{1}{2}\delta(f+B)e^{+j2\pi B\tau}\right]$$

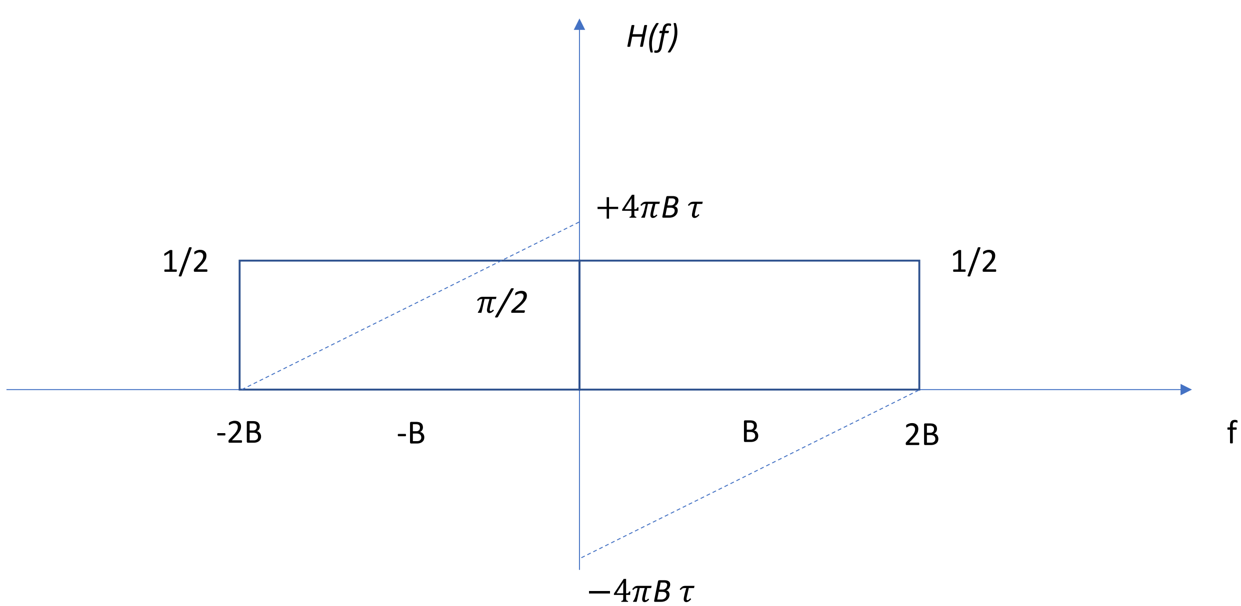
Calcolando la convoluzione si ottiene:

$$H(f) = \frac{1}{2}rect\left(\frac{f-B}{2B}\right)e^{j2\pi(f-B)\tau}e^{-j2\pi B\tau} + \frac{1}{2}rect\left(\frac{f+B}{2B}\right)e^{j2\pi(f+B)\tau}e^{+j2\pi B\tau}$$

Raccogliendo i termini esponenziali:

$$H(f) = \frac{1}{2}rect\left(\frac{f-B}{2B}\right)e^{j2\pi(f-2B)\tau} + \frac{1}{2}rect\left(\frac{f+B}{2B}\right)e^{j2\pi(f+2B)\tau}$$

b – I grafici di modulo (linea continua) e fase (linea tratteggiata) di $H(f)$:



c – Il segnale $x(t) = \cos\big(2\pi B(t+\tau)\big)$ ha trasformata costituita da 2 impulsi:

$$X(f) = \frac{1}{2}\delta(f-B)e^{+j2\pi B\tau} + \frac{1}{2}\delta(f+B)e^{-j2\pi B\tau}$$

La trasformata dell'uscita è:

$$Y(f) = \frac{1}{4}\ \delta(f+B) + \frac{1}{4}\delta(f-B)$$

Infatti le fasi dell'ingresso e della risposta in frequenza si compensano. L'espressione cercata è:

$$y(t) = \frac{1}{2}cos(2\pi Bt)$$

ESERCIZIO 2

a - La trasformata di $x(t) = \frac{\sin\left(10\pi\left(t+\frac{1}{5}\right)\right)}{\pi\left(t+\frac{1}{5}\right)}$ è un rettangolo di banda bilatera 10 e fase lineare crescente:

$$X(f) = rect\left(\frac{f}{10}\right)e^{j\frac{2}{5}\pi f}$$

La trasformata del segnale ricostruito si ottiene replicando $X(f)$ a passo $f_s = 5$ tenendo solo le componenti di frequenza nella banda $-\frac{f_s}{2} \leq f < \frac{f_s}{2}$. Nella banda di ricostruzione tra -2.5 e +2.5 cadono solo tre repliche. In particolare:

nella banda $0 \leq f < 2.5$ $\ X_R(f) = e^{j\frac{2}{5}\pi f} + e^{j\frac{2}{5}\pi(f-5)} = e^{j\frac{2}{5}\pi f}(1+1)$

nella banda $-2.5 \leq f < 0$ $\ X_R(f) = e^{j\frac{2}{5}\pi f} + e^{j\frac{2}{5}\pi(f+5)} = e^{j\frac{1}{5}\pi f}(1+1)$

Quindi: $\quad X_R(f) = rect\left(\frac{f}{5}\right)e^{j\frac{2}{5}\pi f}$

Il segnale tempo-continuo ricostruito ha dunque la seguente espressione:

$$x_R(t) = 2\frac{\sin\left(5\pi\left(t+\frac{1}{5}\right)\right)}{\pi\left(t+\frac{1}{5}\right)}$$

b - Ovviamente l'espressione delle sequenze x_n e $x_R[n]$ è identica e vale $x_n = 10\delta_{n+1}$

$$x_n = \frac{\sin\left(10\pi\left(\frac{n}{5}+\frac{1}{5}\right)\right)}{\pi\left(\frac{n}{5}+\frac{1}{5}\right)} = \frac{\sin\big(2\pi(n+1)\big)}{\frac{1}{5}\pi(n+1)} = 10\delta_{n+1}$$

$$x_R[n] = 2\frac{\sin\left(5\pi\left(\frac{n}{5}+\frac{1}{5}\right)\right)}{\pi\left(\frac{n}{5}+\frac{1}{5}\right)} = 2\frac{\sin\big(\pi(n+1)\big)}{\frac{1}{5}\pi(n+1)} = 10\delta_{n+1}$$

ESERCIZIO 3

a – Dai dati del problema la potenza, integrale della densità spettrale di potenza, è:

$P_x = 2A + 1 = 5$ da cui, banalmente, $A = 2$. Il valor medio m_x del processo coincide con $\pm$ la radice quadrata dell'area dell'impulso nell'origine della densità spettrale di potenza: $m_x = \pm 1$.

b - Campionando il processo dato con $T = \frac{3}{2}$ si ottiene un processo discreto con medesimo valor medio e medesima varianza del processo continuo. Inoltre l'autocorrelazione del processo discreto è uguale a quella del processo continuo campionata a passo $T = \frac{3}{2}$.

Dato che l'autocorrelazione del processo continuo è data da una costante unitaria più un seno cardinale con zeri a passo $\Delta\tau = \frac{1}{2}$, l'autocorrelazione x_n è una costante unitaria più un impulso:

$R_x[m] = 1 + 4\delta_m$ e quindi la varianza della somma è la somma delle varianze.

$$\sigma_y^2 = \sigma_x^2 + \frac{1}{4}\sigma_x^2 + \frac{1}{4}\sigma_x^2 = \frac{3}{2}\sigma_x^2 = 6$$

Il valor medio del processo $y_n = x_n - \frac{x_{n-1}}{2} + \frac{x_{n-2}}{2}$ è uguale a $m_y = m_x\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \pm 1$.

La potenza:

$$P_y = \sigma_y^2 + m_y^2 = 6 + 1 = 7$$