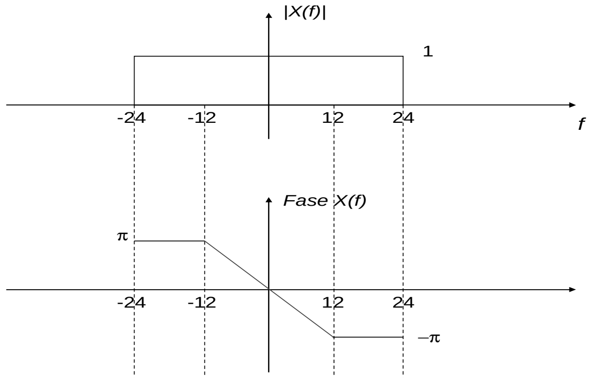
SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI appello del 10 Febbraio 2015

Se s'incontrano difficoltà nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo. Il tempo massimo per lo svolgimento della prova è 2h. I punteggi indicano il peso relativo dell'esercizio.

ESERCIZIO 1

Sia dato un segnale $x(t)$ la cui trasformata di Fourier $X(f)$ ha modulo e fase espressi dai seguenti grafici:



a [7] - Si calcoli l'espressione del segnale $x(t)$

b [4] - Si calcoli l'energia del segnale $x(t)$

ESERCIZIO 2

Il segnale $x(t) = rect(t)$ viene campionato con frequenza di campionamento $f_s = 5Hz$, genera la sequenza x_n di lunghezza finita N.

a [2] - Si dica se la frequenza di campionamento utilizzata è sufficiente per ricostruire il segnale $x(t)$

b [4] - Si calcolino le espressioni della DFT di x_n e di $y_n = x_{n-2}$.

c [5] - Si calcolino i valori della trasformata di Fourier in frequenza normalizzata $Y(\phi)$ della sequenza y_n (di lunghezza infinita) alle frequenze $\phi = k/5$ (con k intero).

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale x_n gaussiano, discreto, stazionario a valor medio nullo con potenza $P = 16$ e con $\rho_x[1] = -\frac{1}{4}$, $\rho_x[2] = \frac{1}{8}$ e $\rho_x[m] = 0$ per $|m| > 2$.

a [6] - Si calcoli la densità spettrale di potenza del processo casuale x_n.

b [5] - Si calcoli valor medio e varianza del processo $y_n = x_n + x_{n+1}$

SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI appello del 10 Febbraio 2015

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a - La trasformata data può essere convenientemente divisa in tre parti:

un rettangolo negativo tra -24 e -12,
un rettangolo negativo tra 12 e 24
un rettangolo tra -12 e 12 con fase lineare negativa $-2\pi f/24$

Anti-trasformando ognuno di questi segnali e sommando si ottiene il seguente risultato:

$$x(t)=\frac{\sin\left(\pi\cdot 24\cdot\left(t-\frac{1}{24}\right)\right)}{\pi\cdot\left(t-\frac{1}{24}\right)}-\frac{\sin(\pi\cdot 12\cdot t)}{\pi\cdot t}\exp\left(j2\cdot\pi\cdot 18\cdot t\right)-\frac{\sin(\pi\cdot 12\cdot t)}{\pi\cdot t}\exp\left(-j2\cdot\pi\cdot 18\cdot t\right)=$$
$$=\frac{\sin\left(\pi\cdot 24\cdot\left(t-\frac{1}{24}\right)\right)}{\pi\cdot\left(t-\frac{1}{24}\right)}-2\frac{\sin(\pi\cdot 12\cdot t)}{\pi\cdot t}\cos\left(2\cdot\pi\cdot 18\cdot t\right)$$

b – L’energia del segnale si calcola banalmente nel dominio delle frequenze dove il modulo quadrato della trasformata è unitario tra -24 e +24.

L’energia vale quindi 48.

ESERCIZIO 2

a - La trasformata di Fourier del segnale dato ha banda infinita quindi il segnale $x(t)$ non è ricostruibile dai suoi campioni.

b - La sequenza risultante dal campionamento è una sequenza di N=5 campioni unitari centrati intorno all’origine. La trasformata Discreta di Fourier della sequenza x_n è per definizione:

$$X_k=\sum_{n=0}^{4}e^{-j2\pi kn/5}=5\delta_k$$

La trasformata Discreta di Fourier della sequenza y_n è uguale a quella di x_n:

$$Y_k=X_k e^{-j2\pi 2k/5}=X_k=5\delta_k$$

c - La trasformata di Fourier in frequenza normalizzata $Y(\phi)$ della sequenza y_n alle frequenze $\phi = k/5$ coincide con i valori della trasformata Discreta di Fourier appena calcolata:

$$Y_k = Y(\phi)\big|_{\phi=\frac{k}{N}}$$

Dunque $Y\left(\frac{k}{5}\right) = \begin{cases} 5 & k = 5p \\ 0 & k \neq 5p \end{cases}$ con p intero

ESERCIZIO 3

a – Il processo dato è gaussiano con varianza 16 e valor medio nullo. L'autocorrelazione del processo x_n vale dunque:

$$R_x[m] = 16 \cdot \rho_x[m] = 16\delta_m - 4\delta_{m-1} - 4\delta_{m+1} + 2\delta_{m-2} + 2\delta_{m+2}$$

La densità spettrale di potenza è la Tdf dell'autocorrelazione

$$S_x(\phi) = 16 - 8\cos(2\pi\phi) + 4\cos(4\pi\phi)$$

b - Il valor medio del processo filtrato è nullo.

L'autocorrelazione del processo filtrato y_n vale:

$$R_y[m] = R_x[m] * h_m * h_{-m} = R_x[m] * (2\delta_m + \delta_{m-1} + \delta_{m+2})$$

Dato che il valor medio è nullo l'autocovarianza coincide con l'autocorrelazione e la varianza del processo filtrato y_n vale:

$$\sigma_y^2 = C_y[0] = R_y[0] = 32 - 4 - 4 = 24$$

Oppure:

$$\sigma_y^2 = E[y^2] = E[(x_n + x_{n+1})^2] = E[x_n^2] + E[x_{n+1}^2] + 2E[x_n x_{n+1}] = R_x[0] + R_x[0] + 2R_x[1] = 16 + 16 - 2 \cdot 4 = 24$$